Г. И. Глейзер

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ

VII – VIII классы

2

Г. И. Глейзер

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА УРОКАХ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА КРУЖКОВЫХ И ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ

Г. И. Глейзер

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ

VII – VIII классы

Пособие для учителей

Москва «Просвещение»
1982

ББК 22.1г
Г53

Рекомендовано Главным управлением школ Министерства просвещения СССР

Глейзер Г. И.

Г53 История математики в школе VII—VIII кл. Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1982. — 240 с.

В книге в виде коротких статей содержится материал из истории математики, доступный ученикам VII—VIII классов. Материал 1-й части предназначен для занятий на уроках, а 2-ю часть можно использовать на внеклассных занятиях. В пособии дан набор задач по арифметике, алгебре и геометрии известных математиков прошлых веков. Книга иллюстрирована.

Эта книга является второй из трех книг Г. И. Глейзера, в которых изложен материал по истории математики для школы.

4306010400—703
103(03)—82 123—82

ББК 22.1г
51(03)

© Издательство «Просвещение», 1982 г.

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Настоящее издание пособия, написанного Г. И. Глейзером, содержит материал, соответствующий программам VII—VIII классов. Книга предназначена для учителей математики. Она знакомит читателей с теми разделами истории математики, которые изучают в VII и VIII классах.

В первой части книги помещен материал по истории математики, который целесообразно сообщить детям на уроках, а во второй — рассмотрен материал для занятий в кружке и для факультативных занятий.

Весь материал первой части пособия распределен по классам и темам в соответствии с действующими программами. В первоначальный вариант[1] пособия внесены небольшие уточнения и дополнения на основании пометок Г. И. Глейзера в авторском экземпляре, а кроме того, внесены дополнения в следующие разделы: гл. 1, п. 13; гл. 2, пп. 24, 27, 33; гл. 4, пп. 32, 33; гл. 5, § 1, 9; гл. 6, § 16.

Автор книги — Глейзер Герш Исакович умер в 1967 г. Подготовку переработанного издания выполнил А. А. Свечников — редактор первого издания книги. Издательство глубоко признательно доктору физ.-математических наук, действительному члену Международной Академии истории науки Б. А Розенфельду за критические замечания, послужившие усовершенствованию содержания настоящего пособия.

---

[1] См.: Глейзер Г. И. История математики в школе. М., 1964; Он же. История математики в средней школе. М., 1971.

ОБРАЩЕНИЕ К ЧИТАТЕЛЯМ

Предлагаемое пособие составлено на основе имеющейся историко-математической литературы и тридцатилетнего личного опыта работы автора в средней и высшей школах. Цель этого пособия — оказать конкретную помощь учителю в привлечении фактов из истории математики при изучении со школьниками программного материала.

При составлении книги автор стремился к тому, чтобы она в значительной мере была доступна пониманию самих учащихся.

В разделе «История математики на уроках» предлагаемого пособия по каждой теме программы имеются краткие беседы, которые рекомендуется проводить на уроках математики попутно с изучением программного материала. В среднем на каждые 6 уроков приходится одна беседа. Такое распределение мы рекомендуем на основе личного опыта занятий со школьниками, но не считаем его образцом и единственно возможным.

Материал для некоторых бесед может показаться избыточным для использования его на одном уроке. В таком случае учитель сам отберет из предложенного материала то, что, по его мнению, наиболее важно и интересно, или же распределит материал на два-три урока.

Условный термин «беседа» следует понимать как сообщение некоторого факта из истории математики, который может быть преподнесен ученикам в виде рассказа учителя, рассмотрения и объяснения рисунка, краткого замечания, разбора задачи, сопровождаемого исторической справкой.

В разделе для внеклассных занятий содержится исторический материал по отдельным избранным вопросам, дополняющий сведения, изложенные в первом разделе. Этот материал можно использовать для самостоятельного чтения учениками.

В конце книги приведены исторические задачи, которые рекомендуется решать на занятиях в кружке или на уроках повторения. Ответы, указания и решения к отдельным задачам также помещены в конце пособия.

Знакомство учеников с фрагментами истории математики в связи с изучением основ предмета на уроках и факультативных занятиях имеет вполне определенные цели, а именно:

1) сведения из истории повышают интерес школьников к изучению математики и углубляют понимание ими изучаемого раздела программы;

2) ознакомление с историческими фактами расширяет умственный кругозор учеников и повышает их общую культуру, позволяет лучше понять роль математики в современном обществе;

3) знакомство с историческим развитием математики способствует общим целям коммунистического воспитания подрастающего поколения.

Современная школьная программа указывает на необходимость знакомства учеников с фактами из истории математики и биографиями великих математиков. Но в программе нет конкретных указаний, какие сведения из истории, когда и как сообщать школьникам. Знакомство учеников с развитием математики означает продуманное, планомерное ознакомление на уроках с наиболее важными событиями из истории науки в органической связи с систематическим изучением программного материала. Лишь такое тесное сплетение истории и теории обеспечит достижение указанных целей.

Координируя изучение математики с другими предметами, в частности с историей общества, подчеркивая роль и влияние практики на развитие математики, указывая условия, а иногда и причины зарождения и развития тех или иных идей и методов, мы тем самым способствуем развитию у школьников диалектического мышления и формированию марксистско-ленинского мировоззрения, содействуем процессу их умственного созревания и сознательному усвоению ими учебного материала. Достигнутое таким образом более глубокое понимание школьного курса математики безусловно вызовет у школьников повышение интереса к предмету.

В VII и VIII классах, по нашему мнению, достаточно ограничиться из истории математики начальными сведениями, связанными с программным материалом.

На первый взгляд кажется трудным найти на уроке время, необходимое для ознакомления с историческим материалом. Однако вопрос о формах использования элементов истории математики на уроках почти полностью подчинен главному вопросу — связи изучаемой в школе математики с историей. Какая бы ни была форма сообщения исторических фактов — краткая беседа, экскурс, лаконичная справка, решение задачи, показ и разъяснение рисунка, — использованное время (5—12 мин) нельзя считать потерянным напрасно, если учитель сумел преподнести исторический факт в тесной связи с изучаемым на уроке теоретическим материалом.

Опыт работы подсказывает, что следует использовать для оз-

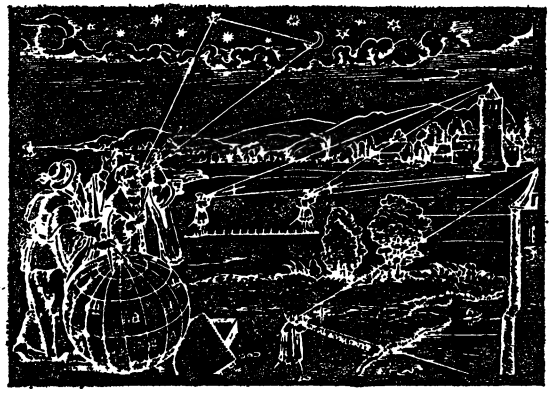
накомления с историей математики уроки закрепления пройденного, что способствует повышению интереса учащихся к таким урокам. Главную методическую трудность представляет вопрос о том, как на деле сочетать изучение определенного раздела программы с изложением соответствующего исторического материала. Преодолеть эту трудность можно лишь постепенно, в ходе планомерной и скрупулезной работы.

Книга содержит минимум того, что, по нашему мнению, должен знать учитель, преподающий математику, и заведомо несколько больше того, что может усвоить ученик средней школы. Материал, содержащийся в сносках, в основном предназначен для учителя.

Предлагаемая работа — одна из немногих попыток дать в руки учителя пособие, которое помогло бы ему конкретно сопровождать изучение школьного курса математики обзором исторического развития науки.

Эта сложная научно-методическая задача может получить полное решение только при активном участии широких масс учителей математики, и поэтому просим всех интересующихся данным вопросом направлять в издательство свои отзывы, критические замечания и предложения по адресу: 129846 Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41, редакция математики.

I



ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА УРОКАХ

Пока алгебра и геометрия развивались врозь, их прогресс был медленным, применение — ограниченным; когда же эти две науки были соединены, они стали помогать друг другу и быстро шагать к совершенству.

Лагранж

VII класс

Глава 1
АЛГЕБРА

§ 1. ДРОБИ

1. Ньютон об алгебраической дроби

Во «Всеобщей арифметике» Ньютона понятие дроби вводится следующим образом:

«Запись одной из двух величин под другой, ниже которой между ними проведена черта, обозначает частное или же величину, возникающую при делении верхней величины на нижнюю.

Так, $\frac{6}{2}$ означает величину, возникающую при делении 6 на 2, т. е. 3, а $\frac{5}{8}$ — величину, возникающую при делении 5 на 8, т. е. восьмую долю числа 5. Далее, $\frac{a}{b}$ есть величина, возникающая при делении a на b. Если, например, a есть 15 и b есть 3, то $\frac{a}{b}$ будет 5. Точно так же $\frac{ab-bb}{a+x}$ означает величину, получающуюся при делении $ab - bb$ на $a + x$ и т. д. Величины такого рода называются дробями».

Далее Ньютон обращает внимание читателей на следующие два обстоятельства:

1) В то время, как запись целого числа перед арифметической дробью означает их сумму, запись целого числа перед алгебраической дробью означает их произведение, например:

$$3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}, \text{ но } 3\frac{a}{b} = 3 \cdot \frac{a}{b}.$$

2) Следует различать алгебраическую дробь от того или иного ее числового значения, а именно: числовое значение алгебраической дроби может выражаться в зависимости от тех или иных значений входящих в нее букв дробным либо целым числом. Например, числовое значение дроби $\frac{a}{b}$ есть $\frac{3}{5}$ при $a = 3$, $b = 5$ или же 4 при $a = 8$, $b = 2$.

2. Алгебраические сведения в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого

«Арифметика» Магницкого, изданная в 1703 г., наряду с подробным и систематическим изложением арифметики содержала также сведения из алгебры, геометрии, тригонометрии, астрономии и навигации[1]. По книге Магницкого русский читатель впервые знакомился с действиями над многочленами, с правилами решения уравнений первой и второй степени. Хотя в целом Магницкий не употреблял еще алгебраической символики, он все же был знаком с нововведением Виета, следуя которому обозначал неизвестные величины прописными гласными, а известные — согласными буквами. Подобно английскому математику Т. Гарриоту, он еще пишет bb, bbb, ..., вместо современных b^2, b^3, ...

В левом нижнем углу заглавного листа «Арифметики» Магницкого изображена доска со следующей записью:

$$2R + 1$$

$$\frac{3R \div 2}{6q + 3R}$$

$$\frac{\div 4R \div 2}{6q \div 1R \div 2}$$

Это не что иное, как умножение «столбиком» двух многочленов. Буквой R (начальная в латинском слове Radix — корень) обозначено неизвестное (наш x), буквой q — неизвестное в квадрате. Черточка с точками $\div$ служила знаком вычитания.

Задание ученикам. Задача 1. Переписать запись Магницкого современными символами и проверить умножение.

3. Алгебраические дроби у Диофанта

В «Арифметике» Диофанта содержится много примеров действий над алгебраическими дробями.

Вот два из них, записанных в современных символах.

Задача 2.

$$\left(\frac{144}{x^4 + 900 - 60x^2}\right) \cdot 30 + \frac{60}{x^2 - 30} = \frac{60x^2 + 2520}{x^4 + 900 - 60x^2}.$$

Задача 3.

$$\frac{96}{x^4 + 36 - 12x^2} - \frac{12}{6 - x^2} = \frac{12x^2 + 24}{x^4 + 36 - 12x^2}.$$

Проверьте!

---

[1] См.: Прудников В. Е. Русские педагоги-математики XVIII—XIX вв. М., 1956, с. 13—27.

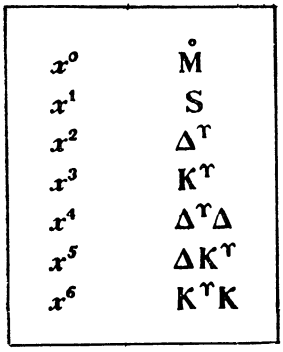


Рис. 1. Зачатки алгебраической символики у Диофанта

4. Одно тождество Эйлера

Среди многих тождеств, принадлежащих знаменитому математику, члену Петербургской академии наук Л. Эйлеру, имеется следующее:

Задача 4.

$$a^3 + b^3 + \left[\frac{b\,(2a^3 + b^3)}{a^3 - b^3}\right]^3 = \left[\frac{a\,(a^3 + 2b^3)}{a^3 - b^3}\right]^3.$$

Проверьте!

5. О буквенных коэффициентах. Задача Ариабхатты

Обозначение неизвестных величин буквами восходит, как известно, по крайней мере к Диофанту (рис. 1). Однако полное значение буквенной символики выявилось лишь после того, как Виет впервые применил ее для обозначения известных величин и коэффициентов. Благодаря введению буквенных коэффициентов стало возможным исследование алгебраических уравнений в общем виде и применение общих формул.

Виет применял в качестве коэффициентов латинские прописные согласные буквы B, D, G,..., а прописные гласные A, E, J,... — для обозначения неизвестных.

Декарт ввел для обозначения коэффициентов строчные начальные буквы латинского алфавита a, b, c,...; для неизвестных же — последние буквы: x, y, z.

Задачи, сформулированные в общем виде, без конкретных числовых данных, встречаются уже в древности и в средние века.

В астрономическом трактате «Ариабхаттиам» индийского ученого Ариабхатты (род. в 476 г.) имеется следующая задача:

Задача 5. «Два лица имеют равные имущества, причем каждое состоит из известного числа вещей одинаковой ценности и известного числа монет. Однако как число вещей, так и сумма денег у них различны. Какова стоимость вещи?»

§ 2. НЕРАВЕНСТВА И ПРИМЕНЕНИЕ ИХ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

6. О знаках равенства и неравенства

При исследовании корней квадратного уравнения по дискриминанту и при построении графиков мы часто применяем наряду со знаком равенства и знаки неравенства.

В 1557 г., когда Роберт Рекорд впервые ввел знак равенства, он мотивировал свое нововведение следующим образом: никакие два предмета не могут быть между собой более равными, чем два параллельных отрезка. Знак равенства Рекорда стал, однако, общеупотребительным лишь в XVIII в., после того как им стали пользоваться Лейбниц и его последователи.

Исходя из знака равенства Рекорда, другой английский ученый Гарриот ввел употребляемые поныне знаки неравенства, обосновывая (в «Практике аналитического искусства», вышедшей в 1631 г. посмертно) нововведение[1] следующим образом: если две величины не равны, то отрезки, фигурирующие в знаке равенства, уже не параллельны, а пересекаются. Пересечение может иметь место справа ($>$) или слева ($<$). В первом случае образованный знак неравенства будет обозначать «больше», во втором — «меньше».

Несмотря на то что знаки неравенства были предложены через 74 года *после* предложенного Рекордом знака равенства, они вошли в употребление намного раньше последнего. Одна из причин этого явления коренится в том, что типографии применяли в то время для знаков неравенства уже имевшуюся у них латинскую букву V, тогда как наборного знака равенства ($=$) у них не было, а изготовлять его тогда было нелегко.

7. О понятии неравенства

Знаки неравенства ($>, <$) появились впервые в 1631 г., но понятие неравенства, как и понятие равенства, возникло в глубокой древности.

В развитии математической мысли без сравнения величин, без понятий «больше» и «меньше» нельзя было дойти до понятия равенства, тождества, уравнения. Приближенные вычисления (в том числе и вычисление π, метод исчерпывания, современное понятие предела и др.) связаны с понятием неравенства.

Некоторые неравенства древности.

В V книге «Начал» Евклида[2] доказывается:

Задача **6.** «Если a — наибольшее число в пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

где a, b, c, d, — положительные числа, то существует неравенство

$$a + d > b + c.$$

Докажите!»

В основном труде Паппа Александрийского, названном «Математическое собрание» и написанном в III в., доказывается:

---

[1] До него писали словами «больше», «меньше»

[2] Эта книга содержит теорию отношений и пропорций, разработанную Евдоксом Книдским.

Задача 7. «Если $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, то $ad > bc$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$).

Докажите!»

8. Строгие и нестрогие неравенства. Неравенство Коши

В теории и в практических задачах встречаются знаки неравенства, соединенные со знаком равенства $\geqq$ (не меньше) или $\leqq$ (не больше). Такие неравенства называются нестрогими в отличие от неравенств, содержащих знак $>$ или $<$ и называемых строгими. Символы $\geqq$ и $\leqq$ были введены в 1734 г. французским математиком Пьером Буге (P. Bouguer). Позже их стали записывать так: $\geqslant$, $\leqslant$.

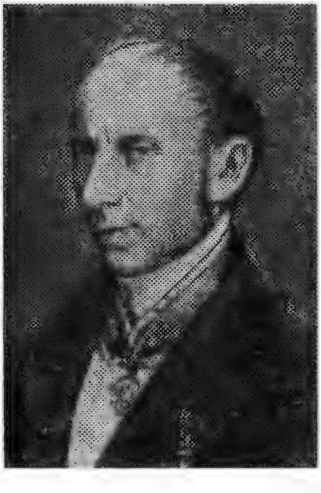
Еще более 2000 лет назад было известно следующее неравенство[1]:

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}, \qquad (1)$$

где $a, b \geqslant 0$. Словами оно выражается так: среднее геометрическое двух неотрицательных чисел не больше среднего арифметического этих чисел.

Задача 8. «Проверьте неравенство (1) на двух примерах».

Доказательство (1) основывается на фундаментальном неравенстве, которое выражает неотрицательность квадрата любого[2] числа:



О. Коши

$$(l - m)^2 \geqslant 0. \qquad (2)$$

Здесь $(l - m)^2 = 0$ только при условии $l = m$.

Из неравенства (2) вытекает:

$$l^2 + m^2 \geqslant 2lm, \text{ или} \qquad (3)$$

$$\frac{l^2 + m^2}{2} \geqslant lm. \qquad (3')$$

---

[1] По существу оно содержится в X книге «Начал» Евклида. См.: Евклид. Начала, кн. VII — X/Пер. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского. М. — Л., 1949, с. 422—425.

[2] Подразумевается «действительных».

Положив $l^2 = a$, $m^2 = b$, получим неравенство (1).

Обобщив неравенство (1) на 3, 4,5,..., n неотрицательных чисел, знаменитый французский математик Огюстен Луи Коши доказал в 1821 г. следующее неравенство:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}, \qquad (4)$$

т. е. среднее геометрическое n неотрицательных чисел не больше среднего арифметического этих чисел. (Равенство существует при условии, если только все n чисел равны между собой.)

Задача 9. «Проверьте неравенство (4) на примерах для $n = 3, 5, 6$».

Классическое доказательство неравенства (4), данное Коши, основано на методе математической индукции. Ныне известно более десятка различных доказательств.

§ 3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

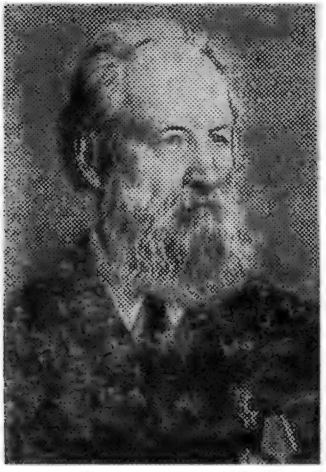
9. О происхождении приближенных чисел

Арифметика родилась из практических нужд человека, из необходимости *считать* предметы, *измерять* величины. Числа, получаемые в результате измерения, всегда приближенные. Это объясняется главным образом следующими двумя обстоятельствами: а) измерительные инструменты никогда не бывают совсем точными и б) при различных измерениях на практике всегда допускаются те или иные неточности. Различные измерения длины пути или взвешивания тела дают очень *близкие* друг другу, но *не одинаковые* результаты.

Все геодезические измерения, относящиеся к площади поверхности и объему Земли, как бы тщательно они ни производились, выражаются приближенными числами. То же имеет место в точнейших измерениях современной физики и астрономии. Так, например, астрономы установили, что расстояние до наиболее далеких галактик — грандиозных звездных систем, доступных для наблюдения современными телескопами — составляет около $3 \cdot 10^{22}$ км, или 3 млрд. световых лет. Конечно, это число *приближенное*.

Во многих случаях и *счет* предметов приводит к приближенным числам, например когда речь идет об определении числа деревьев в лесу или числа жителей большого города.

При составлении планов развития народного хозяйства нашей страны в любой отрасли сельского хозяйства и промышленности, в науке и технике мы пользуемся приближенными числами. Поэтому приближенные вычисления имеют особенно важное значение в настоящее время.



А Н Крылов

10. Правило А. Н. Крылова

Рассмотрение математических задач, решавшихся в Древнем Египте и Вавилоне, показывает, что еще в глубокой древности возникли некоторые приемы приближенных вычислений. Под влиянием запросов техники в настоящее время разработаны разные методы приближенных вычислений.

Большие заслуги в развитии теории приближенных вычислений имеет академик Алексей Николаевич Крылов (1863—1945). Он в 1942 г. писал: «Во всех справочниках, как русских, так и иностранных, рекомендуемые приемы численных вычислений могут служить образцом, как эти вычисления делать не надо... Вычисление должно производиться с той степенью точности, которая необходима для практики, причем всякая неверная цифра составляет ошибку, а всякая лишняя цифра — половину ошибки»[1].

Для того чтобы в приближенных вычислениях можно было бы из самой записи приближенного числа судить о степени его точности, Крылов предложил следующее правило: «Приближенное число следует записать так, чтобы все цифры, кроме последней, были бы надежными», т. е. верными.

Пример: Записывая 142,35, мы должны быть уверенными в том, что абсолютно верна не только целая часть дроби, но и три десятых. Сомнительным может быть только число сотых — 5.

А. Н. Крылов был не только видным математиком, но и выдающимся механиком-кораблестроителем, сделавшим ряд важнейших технических открытий. Он отличался большим умением применять математическую теорию к решению практических и технических задач.

За большие заслуги в деле развития отечественной математики и советского кораблестроения А. Н. Крылов был награжден тремя орденами Ленина, ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда[2].

---

[1] Цит. по кн.: Андронов И. К. Арифметика. Развитие понятия числа и действий над числами. М., 1962, с. 274.

[2] См.: Крылов А. Н. Собрание трудов. 1936—1956, т. I — XII. В XI томе I части помещен «Очерк жизни и деятельности А. Н. Крылова» В. Смирнова и др.

11. О приближенном и графическом решении уравнений

Одной из важнейших заслуг Декарта явилось введение общих методов графического решения уравнений, которое основывается на применении изложенного им в «Геометрии» метода координат. Отдельные уравнения решались с помощью геометрических построений и в древности, и в средние века, до Декарта. Однако благодаря введению системы координат графический метод решения уравнений стал общеприменимым. В дальнейшем методы графического решения задач были развиты Ньютоном, Яковом Бернулли и другими учеными.

Издавна ученые сталкивались с решением уравнений третьей и высшей степеней. Отдельные виды кубических уравнений решали геометрическими способами (Архимед и другие в древности, Омар Хаяйям, ал-Каши и другие в средние века). Однако общего алгебраического решения уравнений третьей степени, т. е. правила для выражения корней через коэффициенты уравнения, не нашли ни древние греки, ни индийцы, ни арабские и среднеазиатские ученые.

Формула для решения общего уравнения третьей степени была открыта лишь в XVI в. итальянскими математиками Ферро, Тартальей и Кардано.

Тогда же итальянский математик Феррари открыл формулу для решения общего уравнения четвертой степени. Однако эти формулы очень громоздкие, в практике ими мало пользуются, предпочитая способы приближенных вычислений корней уравнений степени выше второй.

Поиски общих формул для решения уравнений пятой или более высокой степени оказались безуспешными.

Вот почему важное значение имеет приближенное вычисление корней уравнений высших степеней с точностью, удовлетворяющей нужды науки и практики.

Разработкой методов приближенного решения алгебраических уравнений занимались еще ученые Древнего Китая, арабские и среднеазиатские ученые, среди которых был и ал-Каши. Первым европейским математиком, который систематически решал числовые уравнения приближенным путем, был Виет. Известен также «метод Ньютона» и многие другие методы приближенных вычислений корней уравнений. Один из лучших методов был найден независимо друг от друга тремя математиками в 20—30-х годах XIX в.: Данделеном (Бельгия), Лобачевским (Россия) и Греффе (Швейцария).

Методы численного (приближенного) решения уравнений применяются в настоящее время в различных вопросах науки и техники.

§ 4. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

12. Извлечение квадратного корня из положительного числа

Потребность в действиях возведения в степень и извлечения корня была вызвана, как и другие четыре арифметические действия, практической жизнью. Так, наряду с задачей вычисления площади квадрата, сторона которого a известна, с давних времен встречалась обратная задача: какую длину должна иметь сторона квадрата, чтобы его площадь равнялась $в$?

Еще 4000 лет назад вавилонские ученые составляли наряду с таблицами умножения и таблицами обратных величин (при помощи которых деление чисел сводилось к умножению) таблицы квадратов чисел и квадратных корней из чисел. При этом они умели находить приблизительное значение квадратного корня из любого целого числа. Вавилонский метод извлечения квадратного корня можно иллюстрировать на следующем примере, изложенном в одной из найденных при раскопках клинописных т а б л и ч е к.

Найти квадратный корень из 1700.

Для решения задачи данное число разлагается на сумму двух слагаемых:

$$1700 = 1600 + 100 = 40^2 + 100,$$

первое из которых является полным квадратом. Затем указывается, что

$$\sqrt{1700} = 40 + \frac{100}{2 \cdot 40} = 41\frac{1}{4}.$$

Правило, применявшееся вавилонянами, может быть выражено так: чтобы извлечь корень из числа c, разлагают его на сумму $a^2 + b$ (b должно быть достаточно малым в сравнении с a^2) и вычисляют по приближенной формуле:

$$\sqrt{c} = \sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}. \qquad (1)$$

Вавилонский метод извлечения квадратного корня был заимствован греками. Так, например, у Герона Александрийского находим:

$$\sqrt{160} = \sqrt{144 + 16} = 12 + \frac{16}{24} = 12\frac{2}{3}. \qquad (1')$$

Задание ученикам. З а д а ч а **10.** Вычислить $\sqrt{1700}$ с помощью счетной линейки и по таблицам и сравнить с приведенным результатом (1′).

13. О знаке корня

Начиная с XIII в. итальянские и другие европейские математики обозначали корень[1] латинским словом Radix (корень) или сокращенно R, затем ℞. В XV в. Н. Шюке писал: $R^2 12$ вместо $\sqrt{12}$.

Ныне применяемый знак корня произошел от обозначения, которое применяли немецкие математики XV—XVI вв., называвшие алгебру «Косс», а алгебраистов «коссистами». (Математики XII—XV вв. писали свои произведения на латинском языке. Они называли неизвестное res — вещь. Итальянские математики перевели res словом cosa. Последний термин был заимствован немцами, откуда и появились «Косс» и «коссисты».)

Некоторые немецкие коссисты XV в. обозначали квадратный корень точкой впереди числа или выражения. В скорописи точки заменяли черточками, позже перешедшими в символ ◆. Так, в рукописи, написанной в 1480 г. на латинском языке, один такой символ точки перед числом (◆) означал квадратный корень, два таких знака (◆◆) — корень четвертой степени, а три (◆◆◆) — кубический корень.

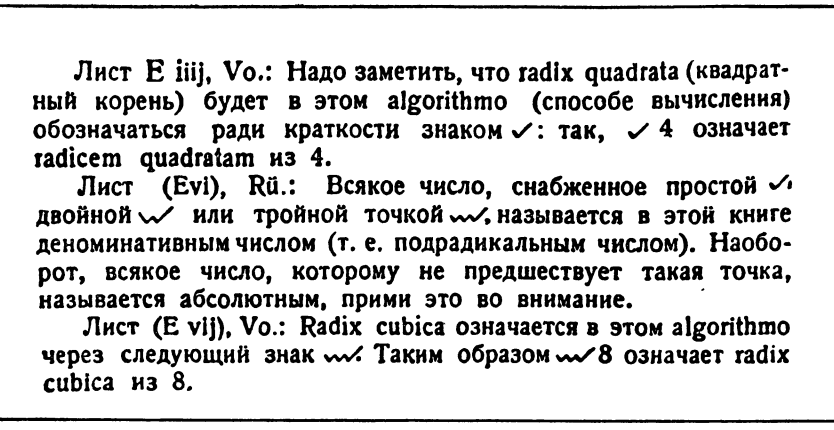
Вероятно, из этих обозначений впоследствии и образовался знак $\vee$, близкий к современному символу корня, но без верхней черты. Этот знак встречается впервые в немецкой алгебре «Быстрый и красивый счет при помощи искусных правил алгебры, обычно называемых Косс» (рис. 2), изданной в 1525 г. в Страсбурге. Автором этой книги был уроженец Чехии, учитель математики в Вене Криштоф Рудольф из Явора (княжество, принадлежавшее в то время богемскому королевству). Книга пользовалась успехом и переиздавалась на протяжении XVI в. и вплоть до 1615 г. Знаком корня пользовались в XVI в. М. Штифель, С. Стевин[2] и др.

В 1626 г. нидерландский математик А. Жирар, сочетая знак Рудольфа с показателями Шюке, ввел близкое к современному обозначение $\overset{2}{\vee}$, $\overset{3}{\vee}$ и т. д. Это обозначение стало вытеснять знак R. Однако долгое время писали, например, $\vee\overline{a+b}$ (вместо совре-

---

[1] См.: Юшкевич А. П. История математики в средние века. М., 1961, с. 56—57.

[2] Стевин писал показатель корня в кружке справа от знака радикала: $\vee$② $\vee$③ вместо нашего $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$ и т. д.


Лист E iiij, Vo.: Надо заметить, что radix quadrata (квадратный корень) будет в этом algorithmo (способе вычисления) обозначаться ради краткости знаком ✓: так, ✓ 4 означает radicem quadratam из 4.

Лист (Evi), Rü.: Всякое число, снабженное простой ✓, двойной ✓ или тройной точкой ✓, называется в этой книге деноминативным числом (т. е. подрадикальным числом). Наоборот, всякое число, которому не предшествует такая точка, называется абсолютным, прими это во внимание.

Лист (E vij), Vo.: Radix cubica означается в этом algorithmo через следующий знак ✓. Таким образом ✓8 означает radix cubica из 8.

Рис. 2. Первое появление в печати (1525 г.) знака радикала. Из хрестоматии по истории математики Г. Вилейтнера

менного $\sqrt{a+b}$). Лишь в 1637 г. Рене Декарт соединил знак корня с горизонтальной чертой, применив в своей «Геометрии» современный знак корня $\sqrt{\ }$.

Однако запись у Декарта несколько отличается от современной. У него, например, записано:

$$\sqrt{C+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}},$$

где буква C поставлена вместо латинского слова cubicus, что означает кубический. В современной записи это выражение будет выглядеть так:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\ .$$

Еще ближе к современному применял обозначение радикала Ньютон в «Универсальной арифметике» (1685 г.). Впервые запись корня, точно совпадающая с ныне принятой, встречается в книге француза Ролль «Руководство алгебры», написанной в 1690 г. Современный знак корня окончательно вошел во всеобщее употребление лишь в начале XVIII в.

§ 5. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

14. Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне

Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени[1] еще в древности была вызвана потребностью решать

[1] См.: Выгодский М. Я. Алгебра и арифметика в древнем мире. 2-е изд. М. — Л., 1967.

задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до н. э. вавилоняне. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}, \quad x^2 - x = 14\,\frac{1}{2}.$$

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает по существу с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены.

Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

15. Как составлял и решал Диофант квадратные уравнения

В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений разных степеней.

При составлении уравнений Диофант для упрощения решения умело выбирает неизвестные.

Вот, к примеру, одна из его задач.

З а д а ч а 11. «Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение — 96».

Диофант рассуждает следующим образом: из условия задачи вытекает, что искомые числа не равны, так как если бы они были равны, то их произведение равнялось бы не 96, а 100. Таким образом, одно из них будет больше половины их суммы, т. е. $10 + x$, другое же меньше, т. е. $10 - x$. Разность между ними $2x$. Отсюда уравнение

$$(10 + x)(10 - x) = 96,$$

или же

$$100 - x^2 = 96,$$

$$x^2 - 4 = 0. \qquad (1)$$

Отсюда $x = 2$. Одно из искомых чисел равно 12, другое 8. Решение $x = -2$ для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.

Если мы решим эту задачу, выбирая в качестве неизвестного одно из искомых чисел, то мы придем к решению уравнения

$$y(20 - y) = 96,$$
$$y^2 - 20y + 96 = 0. \quad (2)$$

Ясно, что, выбирая в качестве наизвестного полуразность искомых чисел, Диофант упрощает решение; ему удается свести задачу к решению неполного квадратного уравнения (1).

Задание ученикам

Задача **12.** «Решить следующие квадратные уравнения из «Арифметики» Диофанта:

1) $12x^2 + x = 1$; 2) $630x^2 + 73x = 6$».

16. Квадратные уравнения в Индии

Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

$$ax^2 + bx = c,\ a > 0. \quad (1)$$

В уравнении (1) коэффициенты, кроме a, могут быть и отрицательными. Правило Брахмагупты по существу совпадает с нашим.

В Древней Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг говорится по поводу таких соревнований следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмит славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». Задачи часто облекались в стихотворную форму.

Вот одна из задач знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары.

Задача **13.**

«Обезьянок резвых стая
Всласть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А двенадцать по лианам...
Стали прыгать, повисая .
Сколько ж было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?»

Решение Бхаскары свидетельствует о том, что он знал о двузначности корней квадратных уравнений (рис. 3).

Соответствующее задаче 13 уравнение

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

Бхаскара пишет под видом

$$x^2 - 64x = -768$$

и, чтобы дополнить левую часть этого уравнения до квадрата, прибавляет к обеим частям 32^2, получая затем:

$$x^2 - 64x + 32^2 =$$

$$= -768 + 1024,$$

$$(x - 32)^2 = 256,$$

$$x - 32 = \pm 16,$$

$$x_1 = 16,\ x_2 = 48.$$

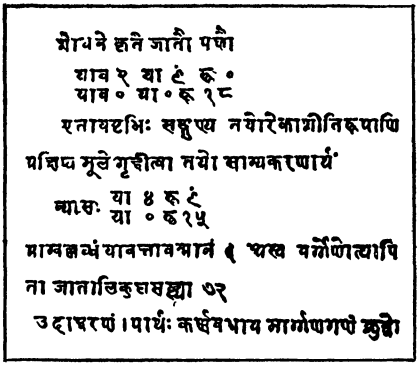


Рис. 3. Часть страницы из алгебры Бхаскары «Видиса Ганита» (вычисление корней)

17. Квадратные уравнения у ал-Хорезми

В алгебраическом трактате ал-Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:

1) «Квадраты равны корням», т. е. $ax^2 = bx$.
2) «Квадраты равны числу», т. е. $ax^2 = c$.
3) «Корни равны числу», т. е. $ax = c$.
4) «Квадраты и числа равны корням», т. е. $ax^2 + c = bx$.
5) «Квадраты и корни равны числу», т. е. $ax^2 + bx = c$.
6) «Корни и числа равны квадратам», т. е. $bx + c = ax^2$.

Для ал-Хорезми, избегавшего употребления отрицательных чисел, члены каждого из этих уравнений слагаемые, а не вычитаемые. При этом заведомо не берутся во внимание уравнения, у которых нет положительных решений. Автор излагает способы решения указанных уравнений, пользуясь приемами ал-джабр и ал-мукабала. Его решение, конечно, не совпадает полностью с нашим. Уже не говоря о том, что оно чисто риторическое, следует отметить, например, что при решении неполного квадратного уравнения первого вида ал-Хорезми, как и все математики до XVII в., не учитывает нулевого решения, вероятно, потому, что в конкретных практических задачах оно не имеет значения. При решении полных квадратных уравнений ал-Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем их геометрические доказательства.

Приведем пример.

Задача 14. «Квадрат и число 21 равны 10 корням. Найти корень» (подразумевается корень уравнения $x^2 + 21 = 10x$).

Решение автора гласит примерно так: раздели пополам число корней, получишь 5, умножь 5 само на себя, от произведения от-

ними 21, останется 4. Извлеки корень из 4, получишь 2. Отними 2 от 5, получишь 3, это и будет искомый корень. Или же прибавь 2 к 5, что даст 7, это тоже есть корень.

Трактат ал-Хорезми является первой дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения.

18. Квадратные уравнения в Европе XIII—XVII вв.

Формулы решения квадратных уравнений по образцу ал-Хорезми в Европе были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202 г. итальянским математиком Леонардо Фибоначчи. Этот объемистый труд[1], в котором отражено влияние математики как стран ислама, так и Древней Греции, отличается и полнотой, и ясностью изложения. Автор разработал самостоятельно некоторые новые алгебраические примеры решения задач и первый в Европе подошел к введению отрицательных чисел. Его книга способствовала распространению алгебраических знаний не только в Италии, но и в Германии, Франции и других странах Европы. Многие задачи из «Книги абака» переходили почти во все европейские учебники XVI—XVII вв. и частично XVIII.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду

$$x^2 + bx = c,$$

при всевозможных комбинациях знаков коэффициентов b, c было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем.

Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в XVI в. учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни. Лишь в XVII в. благодаря трудам Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принимает современный вид.

19. О теореме Виета

Теорема, выражающая связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 г. следующим образом: «Если $B + D$, умноженное на A минус A^2, равно BD, то A равно B и равно D».

---

[1] Изданная в Риме в середине прошлого века «Книга абака» Фибоначчи содержит 459 страниц.

Чтобы понять Виета, следует вспомнить, что A, как и всякая гласная буква, означала у него неизвестное (наше x), гласные же B, D — коэффициенты при неизвестном. На языке современной алгебры вышеприведенная формулировка Виета означает: если имеет место

$$(a + b)x - x^2 = ab,$$

т. е.

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

то

$$x_1 = a,\ x_2 = b.$$

Выражая зависимость между корнями и коэффициентами уравнений общими формулами, записанными с помощью символов, Виет установил единообразие в приемах решения уравнений. Однако символика Виета еще далека от современного вида. Он не признавал отрицательных чисел и поэтому при решении уравнений рассматривал лишь случаи, когда все корни положительны.

Глава 2
ГЕОМЕТРИЯ

От «Начал» Евклида шли все замыслы дальнейшего, более совершенного обоснования геометрии.

В. Ф. Каган

§ 6. МНОГОУГОЛЬНИКИ

20. О параллелограмме

В древних египетских и вавилонских математических документах встречаются следующие виды четырехугольников: квадраты, прямоугольники, равнобедренные и прямоугольные трапеции. В частности, в клинописных математических табличках встречаются прямоугольные треугольники, рассеченные параллелями к одному из катетов на прямоугольные трапеции.

Термин «параллелограмм» греческого происхождения и, согласно Проклу, был введен Евклидом. Понятие параллелограмма и некоторые его свойства были известны еще пифагорейцам.

В «Началах» Евклида доказывается следующая теорема: *в параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны, а диагональ разделяет его пополам.* Евклид не упоминает о том, что точка пересечения диагоналей параллелограмма делит их пополам. Он не рассматривает ни прямоугольника, ни ромба. Полная теория параллелограммов была разработана к концу средних веков и появилась в учебниках лишь в XVII в. Все теоремы о параллелограммах основываются непосредственно или косвенно на аксиоме параллельности Евклида.

Термин «диагональ» происходит от сочетания двух греческих слов «диа» (через) и «гониос» (угол), т. е. прямая, проходящая через вершины углов. Однако Евклид и большинство древнегреческих математиков пользовались почти всюду, в частности для прямоугольника, не этим, а другим термином — «диаметр». Это объясняется тем, что первые геометры мыслили прямоугольник вписанным в круг. В средние века были в ходу оба термина. Фибоначчи и Региомонтан еще пользовались термином «диаметр». Лишь в XVIII в. термин «диагональ» входит в общее употребление.

Слово «ромб» тоже греческого происхождения, оно означало в древности вращающееся тело, веретено, юлу. Ромб связывали первоначально с сечением, проведенным в обмотанном веретене[1].

[1] В «Началах» Евклида термин «ромб» встречается только один раз в определениях I книги, свойства ромба вообще не изучаются. Ромб также имел смысл бубна, который в древности был не круглым, а четырехугольным.

Термин «квадрат» происходит от латинского quadratum (quadrare — сделать четырехугольным), перевод с греческого «тетрагонон» — четырехугольник.

«Первый четырехугольник, с которым познакомилась геометрия, был квадрат», — пишет Д. Д. Мордухай-Болтовский.

21. О трапеции

«Трапеция» — слово греческое, означавшее в древности «столик» (по гречески «трапедзион» означает столик, обеденный стол. Сравните трапеза, трапезная).

В «Началах» термин «трапеция» применяется не в современном, а в другом смысле: любой четырехугольник (не параллелограмм). «Трапеция» в нашем смысле встречается впервые у древнегреческого математика Посидония (I в.). В средние века трапецией называли, по Евклиду, любой четырехугольник (не параллелограмм); лишь в XVIII в. это слово приобретает современный смысл.

Предложение о том, что средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований, было известно древним египтянам, оно содержится в папирусе Ахмеса и фигурирует в виде инскрипции (II в. до н. э.) на стенах храма Эдфу в Верхнем Египте. Это предложение было известно также вавилонским землемерам, оно содержится и в трудах Герона Александрийского.

22. Вычисление площадей в древности

Зачатки геометрических знаний, связанных с измерением площадей, теряются в глубине тысячелетий.

Еще 4—5 тыс. лет назад вавилоняне умели определять площадь прямоугольника и трапеции в квадратных единицах. Квадрат издавна служил эталоном при измерении площадей благодаря многим своим замечательным свойствам: равные стороны, равные и прямые углы, симметричность и общее совершенство формы. Квадраты легко строить, ими можно заполнить плоскость без пробелов[1].

Древние египтяне 4000 лет назад пользовались почти теми же приемами, что и мы, для измерения площади прямоугольника, треугольника и трапеции: основание треугольника делилось пополам и умножалось на высоту; для трапеции же сумма параллельных сторон делилась пополам и умножалась на высоту. Для вычисления площади S четырехугольника со сторонами a, b, c, d (рис. 4) применялась формула

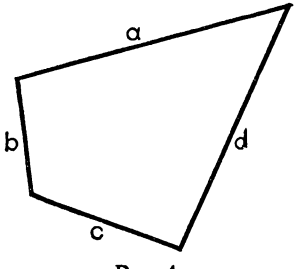


Рис. 4

[1] В Древнем Китае мерой площади был прямоугольник.

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}, \qquad (1)$$

т. е. умножались полусуммы противоположных сторон. Эта формула верна только для прямоугольника. С ее помощью можно вычислить приближенно площадь таких четырехугольников, у которых углы близки к прямым.

Для определения площади S равнобедренного треугольника ABC, в котором $|AB| = |AC|$, египтяне пользовались приближенной формулой[1]:

$$S = \frac{|BC| \cdot |AB|}{2}. \qquad (2)$$

Совершаемая при этом ошибка тем меньше, чем меньше разность между стороной $|AB|$ и высотой $|AD|$ треугольника, иными словами, чем ближе вершина B (и C) к основанию D высоты из A. Вот почему приближенная формула (2) применима лишь для треугольников с сравнительно малым углом при вершине.

Задание ученикам

З а д а ч а 15. Доказать, что египетская формула (1) для вычисления площади четырехугольника верна для прямоугольника.

23. Измерение площадей в Древней Греции

В своих «Началах» Евклид не употребляет слова «площадь», так как он под самим словом «фигура» понимает часть плоскости, ограниченную той или иной замкнутой линией. Евклид не выражает результат измерения площади числом, а сравнивает площади разных фигур между собой. Например[2]:

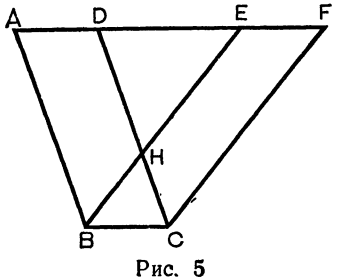


Рис. 5

З а д а ч а 16. «Параллелограммы (рис. 5), находящиеся на равных основаниях и между теми же параллельными, равны между собой, т. е. равновелики. Докажите!»

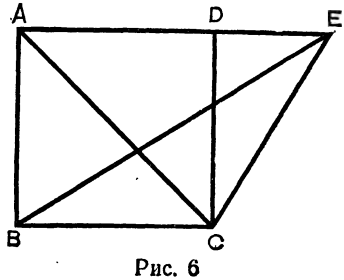


Рис. 6

З а д а ч а 17. «Если параллелограмм $ABCD$ имеет с треугольником BCE одно и то же основание $|BC|$ (рис. 6) и нахо-

[1] Они знали и точную формулу.

[2] «Начала», кн. I, предложения 37, 41.

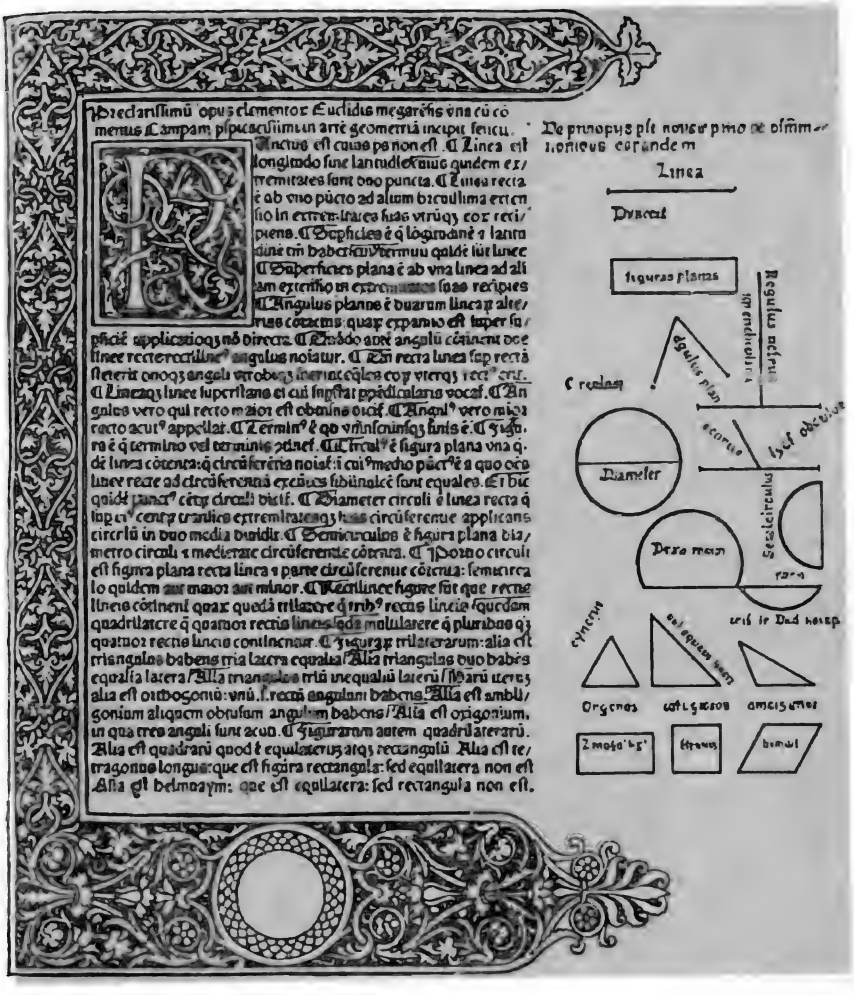


Рис. 7. Страница из первого печатного издания «Начал» Евклида

дится между теми же параллельными, то параллелограмм будет вдвое больше треугольника. Докажите!»

Как и другие ученые древности, Евклид занимается вопросами превращения одних фигур в другие, им равновеликие. Так, в «Началах» решается задача о построении квадрата, равновеликого любому данному многоугольнику. При этом Евклид оперирует самими площадями, а не числами, которые выражают эти площади. То, что мы получаем с помощью алгебры, Евклид получал гео-

метрическим путем. Извлечение квадратного корня из числа означало для Евклида построение стороны квадрата, площадь которого равна площади данного многоугольника (рис. 7).

24. «О земном верстании, как земля верстать»

Потребность измерения расстояний и площадей привела к созданию на Руси рукописей геометрического содержания чисто практического характера. Первые сведения о таких рукописях относятся к XVI в. О промерах расстояний на Руси сохранились более древние памятники. В Государственном Эрмитаже хранится камень с надписью: «В лето 6576 Глеб князь мерил морем по льду от Тмутороканя до Корчева 14 тысяч сажен». Эта запись означает, что в XI в., точнее в 1068 г., было измерено расстояние между городами Таманью и Керчью через Керчинский пролив по льду.

В старейшем русском памятнике XII в. «Русская правда» говорится о межах, т. е. о границах земельных владений.

Многие рукописи, существовавшие в Древней Руси, до нас не дошли. В высказываниях историков XVIII в. имеются заслуживающие доверия указания о том, что им были известны математические рукописи XVI в. Так, В. Н. Татищев (1686—1750) — автор «Истории Российской с древнейших времен...» — утверждал, что он читал наказ, данный в 1556 г. писцам о том, как следует измерять землю. К наказу, по его словам, прилагались «землемерные начертания» — чертежи. Однако этот наказ бесследно пропал.

Также бесследно исчезли математические рукописи XVII в., принадлежавшие писателю и известному историку Н. М. Карамзину (1766—1826). В настоящее время известны 2—3 рукописи XVII в., посвященные целиком арифметике или геометрии, и несколько сборников естественнонаучного содержания, в которые включены и арифметико-геометрические сведения.

В 1775 г. в Оружейной палате был найден «Устав ратных и других дел, касающихся до воинской науки», составленный в начале XVII в. (после того как он был перепечатан, подлинник устава также был утерян). В этом уставе имеются (правда, довольно туманные) правила рецептурного характера для определения расстояний между предметами.

В сохранившейся рукописи «Книга сошного письма», написанной в 1629 г., имеется глава «О земном верстании, как земля верстать». По-видимому, оригинал этой рукописи был создан значительно раньше, а сохранилась до наших дней одна из копий, переписанная с большим числом ошибок.

В главе «О земном верстании» собраны правила измерения площадей фигур различной конфигурации и приведен ряд примеров, как этими правилами пользоваться. Но выводов или обоснований указанных правил нет. В рукописи рекомендуется производить измерение и вычисление площадей различных фигур посредством

измерения площадей простейших фигур: квадрата, прямоугольника, треугольника и трапеции.

Площадь прямоугольника согласно указаниям в этой рукописи следует вычислять путем выделения из прямоугольника наибольшего квадрата, а площадь оставшегося после отсечения квадрата прямоугольника вычислить, узнав, какую долю наибольшего квадрата составляет его площадь, посредством сравнения длины стороны квадрата и малого прямоугольника (см. рис. 8, на котором обозначения даны современные).

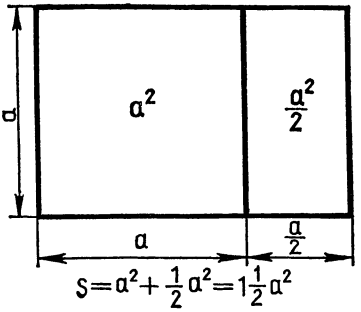


Рис. 8

Для вычисления площади треугольника в рукописи рекомендуется произведение большей и меньшей сторон разделить на два. Это правило дает лишь приближенное значение истинного размера площади.

Площадь равносторонней трапеции в главе «О земном верстании» считается равной полусумме оснований, умноженной на большее основание. По-видимому, здесь вкралась ошибка при переписке рукописи. К этому заключению приводит сопоставление данного правила с аналогичным правилом в рукописях более поздних, в которых площадь трапеции выражается произведением полусуммы оснований на «хобот», т. е. на боковую сторону, что тоже неверно, но значительно ближе к истинной величине.

Из сказанного можно заключить, что точного измерения и вычисления площадей треугольников и трапеций составители этой рукописи не знали.

В ряде более поздних геометрических рукописей правила измерения площадей даются также догматически и разъясняются рядом примеров. В них тоже встречается немало ошибочных утверждений. Например, при измерении площадей указано, что фигуры с равными периметрами имеют равные площади. Однако даже неглубокий анализ таких ошибочных утверждений показывает, что они получились в результате недостаточно обоснованного применения частного правила к более общим случаям.

Вопреки сохранившимся рукописям создание «русскими мастерами каменных дел» различных грандиозных сооружений (кремлевских стен и башен, храмов) говорит о том, что эти мастера обладали довольно основательными знаниями в области геометрии, хотя возможно чисто рецептурного характера. Без таких знаний сооружение прекрасных зданий, как храм Василия Блаженного в Москве [1560 г., мастера Постник (Яковлев) и Барма], вряд ли можно было совершить.

§ 7. ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

25. Об окружности и ее радиусе

Самая простоя из кривых линий — окружность. Это одна из древнейших геометрических фигур. Философы древности придавали ей большое значение. Согласно Аристотелю, небесная материя, из которой состоят планеты и звезды, как самая совершенная, должна двигаться по самой совершенной линии — окружности. Сотни лет астрономы считали, что планеты двигаются по окружностям. Это ошибочное мнение было опровергнуто лишь в XVII в. учением Коперника, Галилея, Кеплера и Ньютона.

Еще вавилоняне и древние индийцы считали самым важным элементом окружности — радиус. Слово это латинское и означает «луч». В древности не было этого термина. Евклид и другие ученые говорили просто «прямая из центра». В одной латинской рукописи XI в., названной «Искусство геометрии» и приписываемой римскому автору Боэцию, встречается впервые термин «полудиаметр». Его употребляли также Фибоначчи и Неморарий (XIII в.), Регномонтан (XV в.) и Тарталья (XVI в.).

Термин «радиус» впервые встречается в «Геометрии» французского ученого Рамуса, изданной в 1569 г., затем у Ф. Виета. Последний писал, что «радиус» — это «элегантное слово», которое знаменитые римские поэты Овидий и Виргилий употребляли в смысле «луч». Известный римский оратор Цицерон как-то сказал: «Шар образован равными радиусами (лучами), выходящими из его центра». Термин «радиус» становится общепринятым лишь в конце XVII в. Термин «хорда» (от греческого «хорде» — струна) был введен в современном смысле европейскими учеными XII—XIII вв.

Тот факт, что диаметр делит круг и окружность на две равные части, был, как говорит Прокл, открыт Фалесом Милетским. На самом же деле этот факт был известен задолго до Фалеса.

Теоремы о зависимости между хордами и расстоянием их от центра изложены в III книге «Начал» Евклида.

26. О касательных к окружности. Архит Тарентский

Определение касательной как прямой, имеющей с окружностью только одну общую точку, встречается впервые в учебнике «Элементы геометрии» французского математика Лежандра (1752—1833). В «Началах» Евклида дается следующее определение: *прямая касается круга, если она встречает круг, но при продолжении не пересекает его.*

То, что касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания, было известно еще *Архиту Тарентскому* (430—365 гг. до н. э.).

Архит — один из талантливейших греческих математиков-пифагорейцев, астроном и государственный деятель. В настоящее время

некоторые историки считают его и автором VIII книги «Начал» Евклида[1], в которой изложена арифметическая теория пропорций. Древнеримский архитектор Витрувий (I в.) рассказывает, что Архит был также замечательным инженером-механиком, строил разные машины, в том числе летающего деревянного голубя, детскую трещотку и др. В трудах Архита тесно переплетаются теория чисел, геометрия, теория музыки. Идеи Архита оказали большое влияние на Платона и на дальнейшее развитие греческой математики.

Одной из знаменитых задач древности, решение которой принесло большую славу Архиту, была задача об удвоении куба (см. гл. 6 § 17).

Доказательство того, что отрезки касательных, проведенных к окружности из внешней точки, равны, отсутствует у Евклида и приписывается комментаторами «Начал» Герону Александрийскому. Предложение: *центр окружности находится на биссектрисе угла, образованного касательными из данной точки*, содержится в одном из произведений греческого математика III в. Паппа.

§ 8. ВЕКТОРЫ

27. Из истории векторов

Под векторной величиной или вектором (в широком смысле слова) понимают величину, обладающую направлением, как, например, сила, скорость, ускорение и т. п.

Величину, не имеющую направления, называют скалярной или скаляром.

Интерес к векторам и векторному исчислению пробудился у математиков в XIX в. в связи с потребностями механики и физики. Однако истоки исчисления с направленными отрезками возникли в далеком прошлом. В Древней Греции пифагорейцы, открыв иррациональные числа, которые нельзя выразить дробями (например: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ и др.), не решились ввести более широкое толкование числа. Математики того времени попытались свести вопросы арифметики и алгебры к решению задач геометрическим путем. Таким образом, было положено начало геометрической теории отношений Евдокса (408—355 гг. до н. э.), а позднее «геометрической алгебре». В геометрическом исчислении, изложенном в труде Евклида «Начала», сложение и вычитание сводились к сложению и вычитанию отрезков, а умножение — к построению прямоугольников на отрезках, соответствующих по длине множителям.

---

[1] См., например: Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука математика древнего Египта, Вавилона и Греции / Пер. с голл. И. Н. Веселовского. М., 1959, с. 209.

Впоследствии в XVI—XVII вв. геометрическая алгебра из-за ограниченности своих средств исследования стала тормозом развития науки.

Однако геометрические исчисления сыграли значительную роль в развитии математики, в том числе и для теории векторов, послужив истоком развития этой теории.

В 1587 г. был опубликован на голландском языке трактат фламандского ученого С. Стевина «Начала статики». В нем автор, рассматривая сложение сил, приходит к выводу, что для нахождения результата сложения двух сил, действующих под углом 90°, необходимо воспользоваться «параллелограммом сил», при этом для обозначения сил С. Стевин ввел стрелки. Иначе говоря, С. Стевин впервые ввел сложение двух векторов, перпендикулярных друг другу.

Значительно позже французский математик Луи Пуансо (1777—1859) в книге «Элементы статики», вышедшей в 1803 г., разрабатывает теорию векторов, которой пользуется при рассмотрении сил, действующих в различных направлениях.

Термин «вектор» происходит от латинского слова *vector*, что означает несущий или ведущий, влекущий, переносящий.

Продолжительное время вектор рассматривался только как направленный отрезок, один из концов которого называли началом, а второй — его концом. С разработкой теории преобразований вектор стали рассматривать не только как направленный отрезок, но и как параллельный перенос, заданный парой точек — точкой O и ее образом O'.

В современной математике раздел, в котором излагается учение о действиях с векторами, называют векторной алгеброй, так как эти действия имеют много общих свойств с алгебраическими действиями.

§ 9. ПОДОБИЕ

28. Отношение и пропорциональность отрезков

Идея отношения и пропорции зародилась в глубокой древности. Об этом свидетельствуют древнеегипетские храмы, детали гробницы Менеса и знаменитых пирамид в Гизе (III тысячелетие до н. э.), вавилонские зиккураты (ступенчатые культовые башни), персидские дворцы, индийские и другие памятники древности. Многие обстоятельства, в том числе особенности архитектуры, требования удобства, эстетики, техники и экономичности при возведении зданий и сооружений, вызвали возникновение и развитие понятий отношения и пропорциональности отрезков, площадей и других величин.

В «Московском» папирусе при рассмотрении отношения большего катета к меньшему в одной из задач на прямоугольный тре-

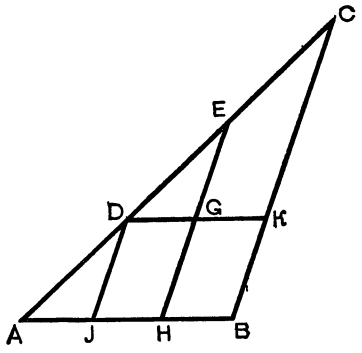


Рис. 9

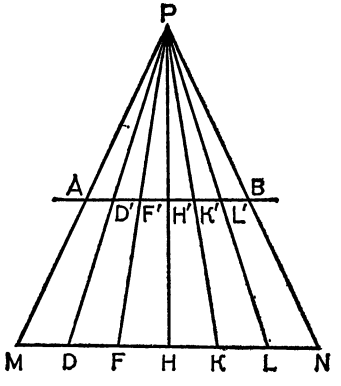


Рис. 10

угольник применяется специальный знак для понятия «отношение».

В «Началах» Евклида учение об отношениях излагается дважды. В VII книге содержится *арифметическая* теория. Она относится только к соизмеримым величинам и к целым числам. Эта теория создана на основе практики действия с дробями. Евклид применяет ее для исследования свойств целых чисел. В V книге излагается *общая* теория отношений и пропорций, разработанная Евдоксом (см. гл. 6, § 14). Она лежит в основе учения о подобии фигур, изложенного в VI книге «Начал»[1].

[1] Евклид под числами понимал лишь *целые* числа и, как все представители классической античной математики, не отождествлял отношения с числами. Лишь на более позднем этапе развития греческой математики ученые (Герон, Диофант и др.) стали отождествлять отношения целых чисел с дробями и сближать понятие общего отношения величин с понятием числа. Несмотря на то что уже Ньютон определил число в более широком смысле, как отношение двух величин, в учебниках XVII и XVIII вв. понятия отношения и числа еще резко отличались друг от друга. Лишь в XIX в. большинство авторов стало отождествлять эти понятия. Так, в учебнике Лакруа (Основания арифметики. Спб., 1826) говорится: «Отношение есть число, целое или дробное, показывающее, сколько раз одна величина содержится в другой». Ушаков, автор «Новой Арифметики» (Спб., 1845), пишет: «Отношение двух чисел есть частное от деления одного на другое».

Первый, кто в изложении элементарной геометрии отступил от евклидового принципа резкого отделения геометрии от учения о числе, был Лежандр, который в своей книге «Элементы геометрии» (1794) предпринял алгебраизацию и арифметизацию элементарной геометрии. Изучение вопросов сравнения и измерения величин Лежандр в отличие от своих предшественников, следовавших Евклиду, ставит в полную зависимость от арифметики и алгебры. Для понимания учения об отношениях отрезков и пропорциональных отрезках Лежандр отсылает к курсам арифметики и алгебры. «Многие наши доказательства, — пишет он, — основаны на простых правилах алгебры... В случае трудности хорошо обратиться к учебникам алгебры и сочетать таким образом изучение обеих этих наук». См.: Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в древней Греции. — ИМИ, 1958, вып. XI, с. 293—323.

29. О делении отрезка в данном отношении

В VI книге «Начал» Евклид так решает задачу о делении отрезка в данном отношении.

Задача 18. «Пусть (рис. 9) требуется рассечь отрезок $|AB|$ в отношении, представленном данными тремя отрезками».

Решение. Строим угол $\angle BAC$ и откладываем на стороне $|AC|$ данные три отрезка: $|AD|$, $|DE|$, $|EC|$. Соединив C и B, проведем через точки E и D отрезки $|EH|$ и $|DJ|$, параллельные $|BC|$. На основе теоремы о пропорциональности отрезков, образующихся на прямых, пересеченных параллельными прямыми, получаем:

$$|AJ| : |JH| : |HB| = |AD| : |DE| : |EC|.$$

Симон Стевин дал следующий способ деления отрезка AB на равные части (рис. 10).

На прямой (MN), параллельной (AB), откладываем заданное число, допустим шесть равных между собой отрезков:

$$|MD| = |DF| = |FH| = |HK| = |KL| = |LN|.$$

Соединим M с A, N с B и продолжим до пересечения в точке P. Теперь соединяем точку P с D, F, H, K, L. В пересечении прямых соединения с отрезком $|AB|$ и получим искомые точки деления: D', F', H', K', L'.

30. О подобии

Одинаковые по форме, но различные по величине фигуры встречаются в вавилонских и египетских памятниках. В сохранившейся погребальной камере отца фараона Рамсеса II имеется стена, покрытая сетью квадратиков, с помощью которой на стену перенесены в увеличенном виде рисунки меньших размеров[1].

Пропорциональность отрезков, образующихся на прямых, пересеченных несколькими параллельными прямыми, была известна еще вавилонским ученым, хотя некоторые приписывают это открытие Фалесу Милетскому. До наших дней сохранилась клинописная табличка, в которой речь идет о построении пропорциональных отрезков[2] путем проведения в прямоугольном треугольнике параллелей к одному из катетов.

Учение о подобии фигур на основе теории отношений и пропорции было создано в Древней Греции в V—IV вв. до н. э. трудами Гиппократа Хиосского, Архита Тарентского, Евдокса Книдского и др. Оно изложено в VI книге «Начал» Евклида, начинаю-

---

[1] Своего рода «палетка» (см. гл. 2, § 9, п. 32).

[2] Таково, например, мнение Ван дер Вардена, которое, однако, не разделяет проф. И. Н. Веселовский. См.: Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции / Пер. с голл. Н. Н. Веселовского. М., 1959, с. 97—99.

щейся следующим определением: «*Подобные прямолинейные фигуры суть те, которые имеют соответственно равные углы и пропорциональные стороны*».

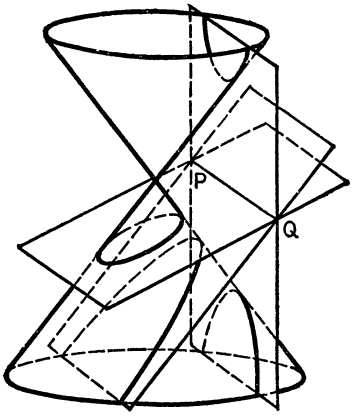


Рис. 11. Конические сечения

31. «Деление в данном отношении» Аполлония

Одним из величайших геометров Древней Греции был Аполлоний Пергский, живший в III—II вв. до н. э. Математике он учился в Александрии. Его учителями были ученики Евклида.

В знаменитом произведении Аполлония «Конические сечения» изложено учение о фигурах, получаемых при сечении плоскостью полного конуса (рис. 11), — эллипсе, параболе, гиперболе.

Сохранилось еще одно из многих произведений Аполлония: «О делении в данном отношении». В нем среди других рассматривается следующая задача.

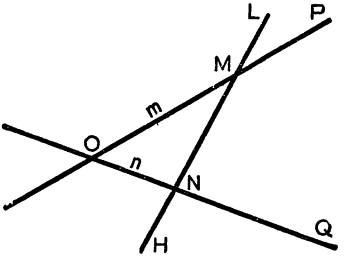


Рис. 12

З а д а ч а 19. «Прямой, проходящей через данную точку H, требуется отсечь на двух пересекающихся прямых (OP) и (OQ) (рис. 12) два отрезка $|OM|$ и $|ON|$, находящихся в данном отношении $m : n$».

32. О построении подобных фигур. Пропорциональный циркуль. Галилей

Свойства подобных фигур издавна применяются на практике при составлении географических карт, планов и чертежей, при землемерных работах на местности (так называемой мензульной съемке) и т. п.

Для практики всегда имели большее значение сравнительно простые и общедоступные методы построения подобных фигур. Одним из них является «способ палетки», который обычно применяется при копировании рисунков, картин и портретов. Желая сделать копию рисунка, мы накрываем его палеткой (от французского palette), т. е. прозрачной пластинкой или бумагой с нанесенной на нее сеткой квадратов. На месте, предназначенном для копии, чертится временная квадратная сетка, которая по оконча-

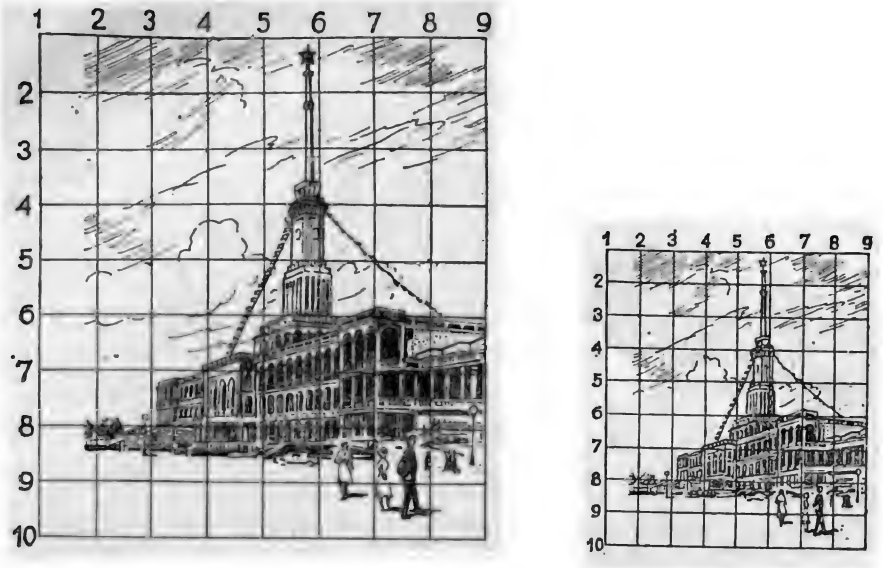


Рис. 13. Уменьшение рисунка в отношении 3 : 5 способом палетки

нии работы стирается. Сторона квадрата временной сетки больше, меньше или равна стороне квадрата палеточной сетки в зависимости от того, требуется ли увеличить, уменьшить или оставить рисунок без изменений. Отношение стороны квадрата временной сетки к стороне квадрата палеточной сетки будет коэффициентом подобия.

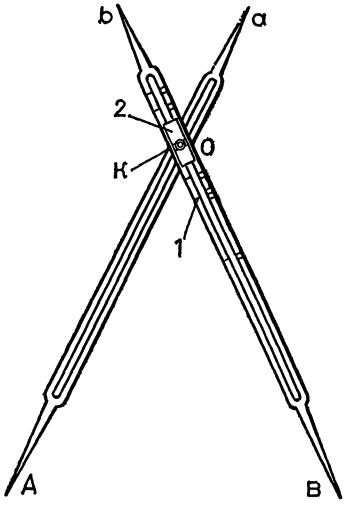


Рис. 14. Пропорциональный циркуль

Пусть некоторая точка (деталь) рисунка находится в вершине (или в центре) одного из квадратов палеточной сетки. Отмечаем на копии соответствующую точку в вершине (или в центре) соответствующего квадрата временной сетки и т. д. (рис. 13). Этот метод копирования при помощи квадратной сетки был известен еще древним египтянам. Палетку применяют также для вычисления площадей на планах и картах.

Для уменьшения или увеличения чертежа в произвольном отношении служит также *пропорциональный циркуль*. Это простой инструмент (рис. 14), в котором шарнир *2* устанавливается так, чтобы черта, нанесенная на

нем, совпала с определенным делением K шкалы 1 на одной из ножек. Тогда отношение расстояний $|ab| : |AB|$ тоже будет равно K. Этот циркуль, который особенно широко используется в картографии, был изобретен великим итальянским ученым *Галилео Галилеем* (1564—1642), тем самым, который открыл закон инерции, законы падения тел, колебаний маятника и др. Галилей впервые в истории астрономии с помощью им же изготовленной зрительной трубы наблюдал набесные светила. Он открыл горы на Луне, 4 спутника Юпитера, фазы Венеры, пятна на Солнце. За то, что Галилей блестяще развил учение Коперника о движении Земли, католическая церковь его жестоко преследовала, он был в 1633 г. осужден римским католическим судом.

Опубликованное Галилеем описание пропорционального циркуля (Построения геометрическим и военным циркулем. Падова, 1606) дало возможность ученым и техникам использовать новый инструмент для быстрого производства различных построений и расчетов. Еще в юношестве Галилей увлекался геометрией. Архимед стал его подлинным учителем. Галилей утверждал, что настоящая философия «написана в величайшей книге, которая постоянно открыта нашим глазам». Эта книга — сама Вселенная, природа, которую нужно научиться читать. «Написана же она на языке математики...»

33. Из истории преобразований. Преобразование подобия

Искусство изображать предметы на плоскости с древних времен привлекало к себе внимание человека. Попытки таких изображений появились значительно раньше, чем возникла письменность. Еще в глубокой древности люди рисовали на скалах, стенах, сосудах и прочих предметах быта различные орнаменты, растения, животных. При этом человек стремился к тому, чтобы изображение правильно отражало естественную форму предмета. Основное требование к изображению сводилось к соответствию точек натурального объекта с точками его изображения на плоскости или какой-либо другой поверхности.

Длительная практика подсказала людям, каким правилам надо следовать, чтобы правильно выразить на плоскости желаемый предмет. Так возникли зачатки учения о соответствии и преобразовании. Раньше других свойств при изображении различных предметов на плоскости были подмечены и изучены законы перспективы. Многие из этих законов были известны в Древней Греции. Как утверждает римский архитектор Витрувий (I в. до н. э.), уже Демокрит (ок. 460—370 гг. до н. э.) и Анаксагор (ок. 500—428 гг. до н. э) соблюдали некоторые правила перспективы при подготовке декорации для постановки трагедий Эсхила (525—456 гг. до н. э.) «Прикованный Прометей» и др.

А. Дюрер. Автопортрет

Особенное внимание исследованию и применению в живописи и зодчестве законов перспективы уделяли художники и архитекторы эпохи Ренессанса. Первая известная нам работа о перспективе талантливого архитектора и ученого Альберти (1402—1472) была напечатана в 1511 г., а написана около 1446 г.

Более подробно и основательно исследовал и описал свойства перспективы немецкий художник Альбрехт Дюрер (1471—1528).

Превосходный для своего времени трактат о перспективе написал гениальный художник Леонардо да Винчи (1452—1519). Художники Рафаэль, Микель Анджело, Тициан, Веронезе и др. в своих бессмертных творениях строго следовали законам перспективы.

Инженер и архитектор Дезарг в 1630 г. разработал (впервые) основы математической теории перспективы. Своими трудами он положил начало изучению проективных преобразований, под которыми впоследствии стали понимать отображение фигуры, данной в одной плоскости, на другую плоскость посредством центрального проектирования или ряда последовательных проектирований.

Перспективные изображения обеспечивали достаточно хорошую наглядность, но для техники этого было мало. Растущие потребности технического прогресса требовали научной разработки теории преобразований, обеспечивающей точность отображения объектов на плоскость с соблюдением размеров. Возникшая проблема решалась усилиями многих талантливых людей. Честь завершения основ метода, позволяющего точно, с соблюдением размеров переносить изображение объекта на плоскость, принадлежит французу Гаспару Монжу (1746—1818).

Большой вклад в дело исследования взаимно однозначного соответствия на плоскости и в пространстве сделал немецкий геометр Мёбиус (1790—1868). Он исследовал преобразования, в которых не только точка отображалась в точку, а прямая — в прямую, но и более сложные соответствия.

Позже Ф. Клейн (1849—1925) положил различные группы преобразований в основу классификации различных геометрий: аффинной (группа аффинных преобразований), проективной (группа проективных преобразований) и т. д. Частным случаем аффинного преобразования является преобразование подобия, в котором растяжение или сжатие происходит равномерно, т. е. одинаково вдоль каждой координатной оси.

* *

*

Подобие есть некоторое взаимно однозначное точечное преобразование плоскости. Если между двумя плоскостями установлено подобное соответствие, то любой угол между прямыми в одной плоскости равен соответственному углу в другой плоскости, а отношение двух соответственных отрезков равно коэффициенту подобия.

Символ, обозначающий подобие фигур, есть не что иное, как повернутая латинская буква S — первая буква в слове similis, что в переводе означает подобие.

Свойства подобия, установленные из опыта, издавна широко использовались на практике при составлении планов, карт, при выполнении архитектурных чертежей и чертежей различных деталей машин и механизмов.

Подобные фигуры с соблюдением определенного коэффициента подобия можно вычерчивать с помощью особого прибора — п а н т о г р а ф а.

VIII класс

Глава 3
АЛГЕБРА

В математике, как ни в какой другой области, не принимают ничего на веру, здесь всегда требуются доказательства

У. Сойер

§ 10. УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К КВАДРАТНЫМ. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

1. Краткий обзор исторического развития алгебры

Алгебра возникла в связи с решением разнообразных задач при помощи уравнений. Обычно в задачах требуется найти одну или несколько неизвестных, зная при этом результаты некоторых действий, произведенных над искомыми и данными величинами. Такие задачи сводятся к решению одного или системы нескольких уравнений, к нахождению искомых с помощью алгебраических действий над данными величинами. В алгебре изучаются общие свойства действий над величинами.

Некоторые алгебраические приемы решения линейных и квадратных уравнений были известны еще 4000 лет назад в Древнем Вавилоне. Немало свойств, правил действий над величинами, алгебраических приемов знали ученые Древней Греции. Однако они выражали их в геометрической форме. Следы геометрической алгебры встречаются поныне в терминах «квадрат» числа, «куб» числа и т. д. Процесс освобождения алгебры от геометрической формы и создания буквенной символики начался еще в Древней Греции (Диофант) и был продолжен в Индии и в средние века в Европе. Однако, лишь после того как Виет ввел буквенные обозначения не только для неизвестных, но и для известных величин, после появления трудов Декарта, Ньютона и других ученых этот длительный исторический процесс был в основном завершен.

Введение в алгебру операций над буквенными символами ознаменовало начало переменных величин. Рассмотрения переменных величин, связей между ними и введение декартовых координат привели к понятию функции и возникновению так называемой «высшей математики» — аналитической геометрии, математического анализа и др.

Понятия переменной величины и функции, как и вся новая «высшая математика», возникли в XVII в. не случайно, а под влиянием запросов естествознания, требовавшего изучения явлений,

Н. Г. Чеботарев

О. Ю. Шмидт

связанных с движением. Примерно до середины XIX в. на развитие алгебры влияла в основном проблема решения уравнений.

Под влиянием исследований молодого французского математика Э. Галуа (1811—1832) в дальнейшем развитии, особенно в XX в., алгебра все более определялась как наука об общих алгебраических операциях (действиях). Значение современной алгебры выходит далеко за пределы учения об уравнениях. Алгебра широко применяется в любом разделе математики, в естествознании и технике. Она продолжает бурно развиваться и в настоящее время.

Среди выдающихся алгебраистов нашего времени числятся и советские ученые: Н. Г. Чеботарев (1894—1947); О. Ю. Шмидт (1891—1956); академики П. С. Александров, А. И. Мальцев и Л. С. Понтрягин; профессора МГУ Б. Н. Делоне, А. Г. Курош, И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов и др.

2. Уравнение первой степени с одним неизвестным. Геометрическое истолкование

Со времен Рене Декарта общий вид уравнений первой степени с одним неизвестным записывается следующим образом

$$ax + b = 0, \text{ где } a \neq 0. \qquad (1)$$

До Декарта записывали члены уравнений с положительными коэффициентами по обе стороны от знака равенства. Декарт впервые стал систематически представлять уравнения в канонической

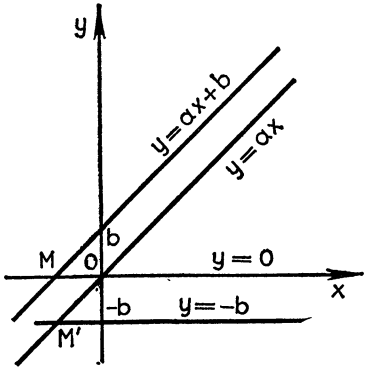


Рис. 15

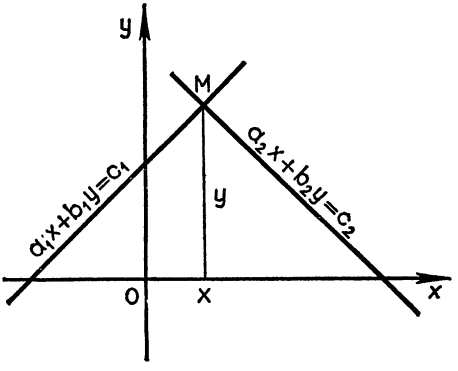


Рис. 16

форме $f(x) = 0$, т. е. с правой частью, равной нулю[1]. Это облегчило доказательство общих теорем алгебры.

Благодаря методу координат, основы которого были впервые опубликованы в «Геометрии» Декарта (1637), между алгеброй и геометрией была установлена тесная связь. Алгебраическое уравнение Декарт рассматривал как зависимость между x и y, определяющую положение точек на плоскости. Так, например, корень уравнения (1)

$$x = -\frac{b}{a} \tag{2}$$

можно геометрически изобразить точкой M пересечения прямой $y = ax + b$ с осью Ox, т. е. с прямой $y = 0$ (рис. 15).

Вводя второе неизвестное (y), Декарт разбивал уравнение на два, каждое из которых представляло некоторое геометрическое место точек.

Так, уравнение (1) можно представить и в виде $ax = -b$, тогда его корень (2) можно найти как абсциссу точки M' пересечения следующих двух прямых (рис. 15):

$$y = ax$$

$$y = -b.$$

Независимо от Декарта и почти одновременно с ним метод координат открыл и другой французский математик — Пьер Ферма. Однако соответствующий труд Ферма — «Введение в плоские и пространственные геометрические места» — был опубликован спустя 14 лет после смерти автора, т. е. в 1679 г.

---

[1] Каноническая форма записи уравнений эпизодически встречается у Т. Гарриота, случайно — у М. Штифеля.

3. Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Издавна применялось исключение неизвестных из линейных уравнений. В XVII—XVIII вв. приемы исключения разрабатывали Ферма, Ньютон, Лейбниц, Эйлер, Безу, Лагранж и др.

В современной записи система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет следующий вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{1}$$

Решение этой системы выражается формулами

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{2}$$

Нижние индексы при буквах впервые употребил в 1675 г. немецкий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц, что в большей мере способствовало созданию теории определителей.

Благодаря методу координат, созданному в XVII в. Ферма и Декартом, стало возможным геометрическое решение уравнений системы (1). Так называемый *графический* метод решения состоит в построении абсциссы x и ординаты y точки пересечения двух соответствующих прямых (рис. 16).

4. Из истории решения системы уравнений, содержащей одно уравнение второй степени и одно линейное

В древневавилонских текстах[1], написанных в III—II тысячелетиях до н. э., содержится немало задач, решаемых с помощью составления систем уравнений, в которые входят и уравнения второй степени. Вот одна из них.

Задача 20. «Площади двух своих квадратов я сложил: $25\frac{5}{12}$. Сторона второго квадрата равна $\frac{2}{3}$ стороны первого и еще 5».

Соответствующая система уравнений в современной записи имеет вид:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25\,\frac{5}{12}, \\ y = \frac{2}{3}x + 5. \end{cases} \tag{1}$$

[1] См.: Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции / Пер. с голл. И. Н. Веселовского. М., 1959, с. 85—102.

Для решения системы (1) вавилонский автор возводит во втором уравнении y в квадрат и согласно формуле квадрата суммы, которая ему, видимо, была известна, получает:

$$y^2 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 25.$$

Подставляя это значение y в первое из системы уравнений (1), автор приходит к квадратному уравнению:

$$1\frac{4}{9}x^2 + 6\frac{2}{3}x = \frac{5}{12}. \qquad (2)$$

Решая это уравнение по правилу, применяемому нами в настоящее время, автор находит x, после чего определяет y. Итак, хотя вавилоняне и не имели алгебраической символики, они решали задачи алгебраическим методом.

Диофант, который не имел обозначений для многих неизвестных, прилагал немало усилий для выбора неизвестного таким образом, чтобы свести решение системы к решению одного уравнения. Вот один пример из его «Арифметики».

З а д а ч а 21. «Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а сумма их квадратов — 208».

Эту задачу мы решили бы путем составления системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x^2 + y^2 = 208. \end{cases}$$

Диофант же, выбирая в качестве неизвестного половину разности искомых чисел, получает (в современных обозначениях):

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x - y) = z, \\ \frac{1}{2}(x + y) = 10. \end{cases}$$

Складывая эти уравнения, а затем вычитая одно из другого (все это Диофант производит устно), получаем

$$x = z + 10; \quad y = 10 - z.$$

Далее,

$$x^2 + y^2 = (z + 10)^2 + (10 - z)^2 = 2z^2 + 200.$$

Таким образом,

$$2z^2 + 200 = 208,$$

откуда

$$z = 2; \quad x = 2 + 10 = 12; \quad y = 10 - 2 = 8.$$

5. Геометрическая алгебра и решение квадратных уравнений

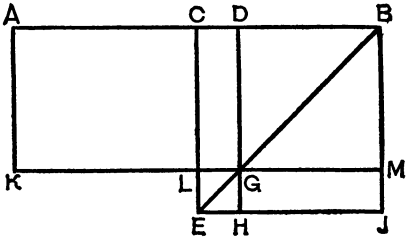


Рис. 17

«Геометрическая алгебра» широко применялась в древнегреческой математике, на ней основывались важнейшие труды Евклида, Архимеда, Аполлония и многих других ученых[1].

Рассмотрим из «Начал» Евклида две теоремы, на основе которых можно получить решение квадратного уравнения. Первая из них (5-е предложение II книги) имеет следующее содержание:

Если отрезок AB (рис. 17) *разделен на два неравных отрезка* $|AD|$ *и* $|DB|$, *то сумма площадей прямоугольника, сторонами которого являются эти отрезки, и квадрата, сторона которого равна полуразности их, равна площади квадрата, стороной которого служит половина отрезка* $|AB|$.

Доказательство непосредственно следует из чертежа. Пусть

$$|AD| = x, \quad |DB| = |BM| = y; \quad |AC| = |CE| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{x+y}{2};$$

$$|CD| = |EH| = \frac{x-y}{2}.$$

Тогда

$$xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2. \qquad (1)$$

Некоторые историки математики (Нейгебауэр, Ван дер Варден и др.) усматривают в этой теореме Евклида геометрический вывод формулы решения квадратного уравнения так, как это делали вавилоняне еще 4000 лет назад.

В вавилонских математических текстах условие и решение задач, сводящихся к уравнениям, излагаются словесно, без доказательств. В них даны только указания, что следует делать для решения той или иной задачи. Тем не менее дошедшие до нас зачатки числовой алгебры, записанные на клинописных табличках, особенно задачи на квадратные уравнения, можно считать первыми шагами математической теории. Многие из вавилонских задач носят абстрактный характер, в них неизвестные названы «стороны прямоугольника», или «длина» и «ширина», а их произведение —

[1] См.: Евклид. Начала / Пер. с греч. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского. М. — Л., 1948, кн. I — VI, с. 65—68, 307—308.

«площадь». Одной из основных задач, из которой у вавилонских ученых возникло учение о квадратных уравнениях, была следующая.

З а д а ч а 22. «Найти стороны прямоугольника, зная их сумму и площадь прямоугольника». Задача приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b. \end{cases} \tag{2}$$

Такие системы решались с помощью введения вспомогательного неизвестного. По существу вавилонский метод решения системы (2) таков.

Пусть

$$x = \frac{a}{2} + z, \quad y = \frac{a}{2} - z.$$

Имеем:

$$\left(\frac{a}{2} + z\right)\left(\frac{a}{2} - z\right) = b,$$

или

$$\frac{a^2}{4} - z^2 = b.$$

Откуда

$$b + z^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Далее находим:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

$$y = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \tag{3}$$

при этом ясно, что равенство (3) совпадает с евклидовой формулой (1), если учесть, что

$$b = xy, \quad z^2 = \frac{a^2}{4} - b = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2;$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Вторая теорема Евклида (6-е предложение II книги «Начал») имеет следующее содержание (рис. 18).

Если отрезок AB разделен пополам (в точке C) и к нему по той же прямой прибавлен отрезок BD, то сумма площадей прямоугольника со сторонами $|AD|$ и $|DM|$ $(= |BD|)$ и квадрата со стороной $|EH|$ $\left(= |CB| = \frac{|AB|}{2}\right)$ равна площади квадрата со стороной $|CD|$ $(= |CB| + |BD|)$.

Обозначив $|AD| = x$, $|BD| = y$, получим, что $|AB| = x - y$,

$$|AC| = |CB| = \frac{x-y}{2},$$

$$|CD| = \frac{x-y}{2} + y = \frac{x+y}{2}.$$

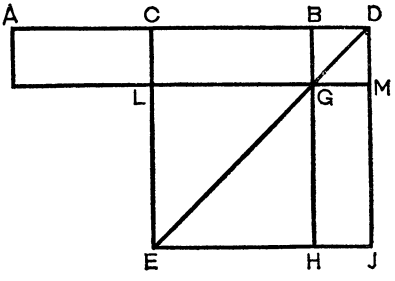


Рис. 18

Содержание теоремы можно таким образом выразить через ту же формулу (1). К этой формуле приводит и решение следующей задачи вавилонских математиков.

З а д а ч а **23.** «Найти стороны прямоугольника, зная их разность и площадь прямоугольника».

Задача решается у вавилонян аналогично задаче 22:

$$\begin{aligned} x - y &= a, \\ xy &= b; \end{aligned} \qquad (4)$$

$$x = \frac{a}{2} + z, \quad y = z - \frac{a}{2};$$

$$\left(z + \frac{a}{2}\right)\left(z - \frac{a}{2}\right) = b; \quad z^2 - \frac{a^2}{4} = b,$$

$$b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = z^2. \qquad (5)$$

Откуда

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},$$

$$y = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

Равенство (5) и тут совпадает с евклидовой формулой (1).

Произведя в системе (2) подстановку $y = a - x$, а в системе (4) $y = x - a$, получаем следующие формы квадратных уравнений, применявшиеся учеными Древней Греции:

$$x(a - x) = b,$$

$$x(x - a) = b.$$

Применялась и третья форма: $x(x + a) = b$.

Несмотря на то что в подобных задачах речь шла о чисто геометрическом построении отрезков, древние греки, конечно, знали связь между указанными построениями и правилом решения квадратного уравнения.

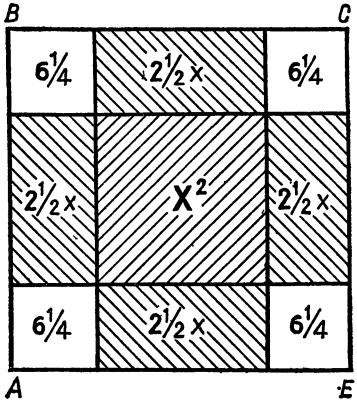


Рис. 19

Геометрический характер греческой алгебры требовал, чтобы в равенство входили члены с одинаковыми измерениями. В этом и состоит *принцип однородности*, который приходилось соблюдать при составлении уравнений. Произведению двух чисел $x \cdot y$ соответствовала площадь прямоугольника, которую можно было складывать, например, с площадью другого прямоугольника или квадрата a^2, но не со стороной какой-либо фигуры.

* *

Вот один, ставший знаменитым, пример из «Алгебры» ал-Хорезми.

З а д а ч а 24. Решить уравнение: $x^2 + 10x = 39$. (6)

Задача эта формулируется в оригинале следующим образом: «Квадрат и 10 корней равны 39».

Для ее решения рассматривается квадрат (рис. 19) с искомой стороной x, на сторонах которого строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна $2\frac{1}{2}$, следовательно, площадь каждого равна $2\frac{1}{2} \cdot x$. Полученную фигуру дополняют затем до нового квадрата $ABCE$, достраивая в углах четыре равных квадрата, сторона каждого из которых равна $2\frac{1}{2}$, а площадь $6\frac{1}{4}$. Тогда площадь P квадрата $ABCE$ можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата (x^2), четырех прямоугольников ($4 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot x = 10x$) и четырех пристроенных квадратов ($4 \times 6\frac{1}{4} = 25$), т. е.

$$P = x^2 + 10x + 25. \qquad (7)$$

Заменяя в (7) $x^2 + 10x$ числом 39, согласно (6) получим $P = 64$, откуда следует, что сторона квадрата $ABCE$, т. е. отрезок AB, равна 8. Для искомой же стороны x первоначального квадрата получим:

$$x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3.$$

Такое геометрическое построение соответствует следующим алгебраическим преобразованиям при решении уравнения $x^2 + px = q$:

1) $x^2 + 4\left(\frac{p}{4}x\right) + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2$;

2) $\left(x + 2\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2$;

3) $x + 2\frac{p}{4} = \sqrt{q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2}$;

4) $x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$.

Последнее и представляет правило ал-Хорезми для решения указанного квадратного уравнения.

* * *

Европейские математики XII—XV вв. шли по стопам арабских, среднеазиатских и античных ученых. Лишь начиная с XVI в. в Европе происходят значительные сдвиги в развитии алгебры, намечается постепенный отход от методов геометрической алгебры. Однако влияние античной математики долгое время сказывалось на трудах алгебраистов XVI и XVII вв. В произведениях Виета алгебра еще тесно связана с геометрией, в ней строго соблюдается принцип однородности. Он различает две алгебры: «Числовая логистика», имеющая дело только с числами, и «Видовая логистика», изучающая общие величины с помощью геометрических «видов» (длина, площадь, тело и др.) и фигур. Общие величины Виет обозначал латинскими прописными буквами.

Геометрическая алгебра сыграла важную роль на первом этапе развития алгебры не только в Древней Греции, но и в странах ислама, однако ее возможности были весьма ограниченны. Геометрическая алгебра была хороша лишь для решения квадратных уравнений. Для представления произведения трех величин уже нужно было пользоваться пространственными фигурами, например кубом или параллелепипедом, а геометрическое представление произведения четырех сомножителей и больше вообще было невозможным. Вот почему в XVI—XVII вв. методы геометрической алгебры стали стеснять дальнейший прогресс науки и сдерживали развитие алгебры.

В первой половине XVII в. значительный шаг вперед в арифметизации алгебры сделал Рене Декарт. Он не отделял учение о числах от учения о величинах, не соблюдал принципа однородности и стремился освободить алгебру от подчинения геометрии[1].

[1] В некоторых отношениях и у Декарта алгебра связывалась по-прежнему с геометрией. Всякую величину он выражал прямолинейным отрезком, a^2 и a^3 тоже представлял отрезками и алгебраические действия относил к отрезкам. Правда, отрезки Декарт применял так, как в настоящее время применяются числа.

В трудах английских математиков XVII в. Оутреда, Гарриотта, Валлиса и особенно Ньютона уже отчетливо проявляется арифметическое построение алгебры. И если во «Всеобщей арифметике» Ньютона большое место еще занимают геометрические приложения, геометрическое построение корней уравнений и т. п., то уже в «Началах алгебры» Клеро (1746) и в «Универсальной арифметике» Эйлера (1768—1769) все изложение алгебры носило чисто арифметический характер.

В наши дни от геометрической алгебры остались лишь незначительные следы, вроде «квадрат», «куб» числа.

6. О квадратичных иррациональностях

В отличие от уравнения первой степени квадратное уравнение с рациональными коэффициентами может иметь и иррациональные корни. Последние называются *квадратичными иррациональностями*. Изучению и классификации квадратичных (и биквадратичных) иррациональностей посвящена самая большая и самая трудная X книга «Начал» Евклида. В ней теория иррациональностей изложена чисто геометрически. Евклид выводит среди других и такие преобразования, которые в современной символике можно записать следующим образом:

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a \pm b\sqrt{2ab}}, \tag{1}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}. \tag{2}$$

Ученые Индии, Ближнего и Среднего Востока частично раскрыли арифметическое содержание евклидовой теории иррациональностей. С помощью равенств (1) и (2) Бхаскара (XII в.) доказывает, например, следующие равенства:

$$\sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}, \tag{3}$$

$$\frac{\sqrt{9} + \sqrt{54} + \sqrt{450} + \sqrt{75}}{5 + \sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}. \tag{4}$$

Задача 25. «Докажите равенства (1) и (2)».

Еще до Бхаскары со сложными квадратичными иррациональностями оперировал каирский метематик Абу Камил (IX—X вв.), распространивший и развивший идеи ал-Хорезми. Вот одна из задач Абу Камила[1].

---

[1] См.: Юшкевич А. П. История математики в средние века. М., 1961, с. 213.

Задача **26**. «Разделить 10 на два слагаемых так, чтобы сумма отношений одного к другому равнялась бы $\sqrt{5}$».

Решение. Составляется квадратное уравнение:

$$\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=\sqrt{5}, \qquad x^2(2+\sqrt{5})+100=$$

$$=x(20+\sqrt{500}).$$

Следует почленное умножение на $\sqrt{5}-2$, после чего автор получает:

$$x^2+\sqrt{50000}-200=10x,$$

$$x=5-\sqrt{225-\sqrt{50000.}}$$

Абу Камил излагает и ведущее к более простому выражению корня второе решение с помощью подстановки: $\frac{10-x}{x}=y$. (Проверьте!) Квадратичными иррациональностями занимались и европейские математики на протяжении средних веков и нового времени. Основная теорема в этой области была сформулирована и доказана величайшим французским математиком Жозефом Луи Лагренжем. В ней говорится, что всякая квадратичная иррациональность разлагается в периодическую бесконечную цепную дробь.

Любое число вида $\sqrt{a}$, где a — рациональное число, не являющееся полным квадратом, есть иррациональное число, как и любое число вида $\sqrt[3]{b}$, где b не является кубом, и т. д. О таких иррациональных числах говорят, что они выражаются через радикалы. Однако существует бесконечное множество иррациональных чисел, которые нельзя представить через радикалы.

В XVI в. итальянские математики открыли решение общих алгебраических уравнений 3-й и 4-й степени, выражая их нерациональные корни через радикалы (иррациональности 3-й и 4-й степени). Долгое время считали, что иррациональный корень любого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами можно выразить через радикалы. Лишь в 20-х годах XIX в. молодой норвежский математик Нильс Абель доказал, что иррациональные корни общих уравнений выше 4-й степени не могут быть выражены через радикалы.

Числа, выражающие корни алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами, называют *алгебраическими числами*. Таким образом, радикалы (иррациональности n-й степени) являются лишь частью (подмножеством) множества алгебраических чисел. Но иррациональные числа могут быть и неалгебраическими (трансцендентными). Такими, например, являются иррациональные числа π и e, $3^{\sqrt{2}}$ и др.

§ 11. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

7. О числовых последовательностях

В настоящее время числовые последовательности рассматриваются как частные случаи функции. Числовая последовательность есть функция натурального аргумента. (Так, например, арифметическая прогрессия является линейной функцией натурального аргумента, а геометрическая прогрессия — показательной функцией натурального аргумента.)

Понятие числовой последовательности возникло и развилось задолго до создания учения о функции. Вот примеры бесконечных числовых последовательностей, известных еще в древности:

1) 1, 2, 3, 4, 5, ... — последовательность натуральных чисел;
2) 2, 4, 6, 8, 10, ... — последовательность четных чисел;
3) 1, 3, 5, 7, 9, ... — последовательность нечетных чисел;
4) 1, 4, 9, 16, 25, ... — последовательность квадратов натуральных чисел;
5) 2, 3, 5, 7, 11, ... — последовательность простых чисел;
6) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ — последовательность чисел, обратных натуральным.

Число членов каждого из этих рядов бесконечно; первые пять последовательностей — монотонно *возрастающие*, последняя — монотонно *убывающая*. Все перечисленные последовательности, кроме 5-й, являются заданными ввиду того, что для каждой из них известен общий член, т. е. правило получения члена с любым номером. Для последовательности простых чисел общий член неизвестен, однако еще в III в. до н. э. александрийский ученый Эратосфен указал способ (правда, очень громоздкий) получения n-го ее члена. Этот способ был назван «решетом Эратосфена».

Идея предела последовательности восходит к V—IV вв. до н. э. Прогрессии — частные виды числовых последовательностей — встречаются в памятниках II тысячелетия до н. э.

8. Арифметические прогрессии в древности

В клинописных табличках вавилонян, как и в египетских папирусах, относящихся ко II тысячелетию до н. э., встречаются примеры арифметических и геометрических прогрессий.

Вот одна вавилонская задача, в которой используется арифметическая прогрессия.

З а д а ч а 27. «10 братьев, $1\frac{2}{3}$ мины серебра. Брат над братом поднимается, на сколько поднимается, не знаю. Доля восьмого 6 шекелей. Брат над братом — на сколько он выше?»

Итак, $1\frac{2}{3}$ мины (мина равна 60 шекелям) серебра требуется разделить между 10 братьями так, чтобы доли братьев составляли арифметическую прогрессию. Требуется найти разность прогрессии, зная, что восьмой брат получает 6 шекелей.

Решите задачу, пользуясь известными алгебраическими формулами.

Вавилонский автор, не имевший в своем распоряжении ни современной символики, ни готовых формул, вынужден придерживаться строго арифметических рассуждений. Идея его решения следующая. Он начинает с нахождения средней арифметической (средней доли), деля $1\frac{2}{3}$ мины на 10 и получая $\frac{10}{60}$ мины, ее умножает затем на два. Итак, удвоенная средняя доля есть $\frac{20}{60}$ мины. Это и есть сумма долей третьего и восьмого братьев, имея в виду, что первого от третьего, как и восьмого от десятого отделяют 2 ступени (интервала). Третьего же от восьмого отделяют 5 ступеней, а разность между их долями составляет $\frac{8}{60}$ мины. Отсюда и находится значение одной ступени, т. е. разность прогрессии, равная $\frac{1}{5}$ от $\frac{8}{60}$ мины, или $\frac{1}{60}+\frac{36}{3600}$ мины.

А вот египетская задача из папируса Ахмеса.

Задача 28. «Пусть тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между 10 человеками, разность же между каждым человеком и его соседом равна $\frac{1}{8}$ меры».

При решении этой и других аналогичных задач египтяне, видимо, пользовались правилом, которое можно записать в современной символике так:

$$a=\frac{S}{n}-(n-1)\frac{d}{2}. \qquad (1)$$

Оно эквивалентно нашей формуле

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot n. \qquad (2)$$

Происхождение этого правила не установлено: оно, вероятно, эмпирического характера.

Задачи на арифметические (и геометрические) прогрессии имеются и в древнекитайском трактате «Математика в девяти книгах», в котором нет, однако, указаний на применение какой-либо формулы суммирования.

Первые из дошедших до нас задач на прогрессии связаны с запросами хозяйственной жизни и общественной практики, как, например, распределение продуктов, деление наследства и т. д.

9. Геометрические прогрессии в древности и в средние века[1]

В папирусе Ахмеса содержится задача, в которой требуется найти сумму n членов геометрической прогрессии, зная первый ее член и знаменатель[2].

Из одной клинописной таблички можно заключить, что, наблюдая Луну от новолуния до полнолуния, вавилоняне пришли к такому выводу: в первые 5 дней после новолуния рост освещения лунного диска совершается по закону геометрической прогрессии со знаменателем 2. В другой, более поздней табличке речь идет о суммировании геометрической прогрессии:

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9.$$

(Решите!)

Решение и ответ $S = 512 + (512 - 1)$, данные в табличке, наводят на мысль, что автор задачи пользовался формулой

$$S_n = 2^n + (2^n - 1),$$

однако о том, как он дошел до нее, мы ничего пока не знаем.

Издавна большой популярностью пользуется следующая з а д а ч а - л е г е н д а, которая, как полагают, относится к началу нашей эры[3].

«Индийский царь Шерам позвал к себе изобретателя шахматной игры, своего подданного Сету, чтобы наградить его за остроумную выдумку. Сета, издеваясь над царем, потребовал за первую клетку шахматной доски 1 пшеничное зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — 4 зерна и т. д. Оказалось, что царь не был в состоянии выполнить это «скромное» желание Сеты».

В этой задаче речь идет о суммировании геометрической прогрессии $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{63}$. Ее сумма равна:

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Такое количество зерен пшеницы можно собрать лишь с урожая планеты, поверхность которой примерно в 2000 раз больше всей поверхности Земли.

Любопытно отметить, что в задачах на геометрические прогрессии китайской «Математики в девяти книгах» знаменатель равен 2. Формул суммирования здесь нет. По содержанию некоторые китайские задачи трактуют о растущей или убывающей про-

---

[1] См.: Б у х ш т а б А. А. Теория чисел. М., 1960, с. 93 и сл.

[2] См.: Г л е й з е р Г. И. История математики в школе, IV — VI кл. М., 1981, задачи 38, 39.

[3] В настоящее время известно, что эта задача встречается у ал-Беруни.

изводительности труда ткачих. Примеры арифметических и геометрических прогрессий имеются и в индийских «сиддхантах».

Суммированием геометрических (и арифметических) прогрессий и составлением соответствующих, не всегда отвечающих практическим нуждам задач занимались многие любители математики на протяжении древних и средних веков.

В древнерусском юридическом сборнике «Русская правда» содержатся выкладки о приплоде от скота и пчел за известный промежуток времени, о количестве зерна, собранного с определенного участка земли, и т. д. В некоторых из них вычисляется сумма геометрической прогрессии со знаменателем 2. Эти задачи, по-видимому, не имели хозяйственного или юридического значения, а как и в других странах явились результатом развития интереса любителей математики к математическому содержанию подобных задач; однако впервые задачи на прогрессии возникли из наблюдений над явлениями природы и из исследования общественно-экономических явлений, к которым применим закон арифметической или геометрической прогрессии.

10. Развитие учения о прогрессиях

Возможно, что древние вавилоняне и другие народы той далекой эпохи имели некоторые общие приемы решения задач, которые дошли до нас, однако об этих приемах мы пока ничего не знаем. Теоретические сведения, связанные с прогрессиями, впервые встречаются в дошедших до нас документах Древней Греции.

Уже в V в. до н. э. греки знали следующие прогрессии и их суммы:

1) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

2) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$;

3) $1 + 3 + 6 + \ldots + (2n+1) = (n + 1)^2$ и др.

В «Псаммите» («Исчислении песчинок») Архимед впервые сопоставляет арифметическую и геометрическую прогрессии:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

и указывает на связь между ними, например:

$$10^3 \cdot 10^5 = 10^{3+5} = 10^8, \quad (3)$$

т. е. для умножения двух членов геометрической прогрессии достаточно сложить соответствующие члены арифметической прогрессии и взять полученную сумму в качестве показателя 10.

У греков теория геометрических прогрессий была связана с так называемой непрерывной геометрической пропорцией:

$$a : b = b : c,$$

в которой числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Аналогично в непрерывной арифметической пропорции

$$a - b = b - c$$

числа a, b, c образуют арифметическую пропорцию с разностью

$$\frac{c-a}{2}.$$

Прогрессии рассматривались как бы продолжениями пропорций, вот почему эпитеты *арифметическая* и *геометрическая* были перенесены от пропорций на прогрессии[1].

Такой взгляд на прогрессии сохранился и у многих математиков XVII и даже XVIII в. Именно так следует объяснить тот факт, что символ $\div\!\!\div$, встречающийся у Барроу, а затем и у других английских ученых того времени для обозначения непрерывной геометрической пропорции, стал обозначать в английских и французских учебниках XVIII в. геометрическую прогрессию. По аналогии знаком $\div$ стали обозначать арифметическую прогрессию.

В «Началах» Евклида[2] есть теорема, которая по существу эквивалентна знакомой нам формуле суммы геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{lq - a}{q - 1}. \tag{4}$$

Одно из доказательств Архимеда, изложенное в его произведении «Квадратура параболы», сводится опять-таки по существу к суммированию бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$a + \frac{a}{4} + \frac{a}{4^2} + \frac{a}{4^3} + \dots = \frac{a}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}a. \tag{5}$$

Для решения некоторых задач из геометрии и механики Архимед вывел формулу суммы квадратов натуральных чисел, хотя ею пользовались и до него:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \tag{6}$$

Некоторые формулы, относящиеся к прогрессиям, были известны китайским и индийским ученым. Так, Ариабхатта (V в.) знал формулы для общего члена, суммы арифметической прогрессии

---

[1] Греки рассматривали еще *гармоническую* пропорцию.

[2] См.: Евклид. Начала / Пер. с греч. Д. Д. Мордухай-Болтовского. М. — Л., 1948, кн. I — VI, 1950, кн. VI — X, в кн. IX предложение 35.

и др. Магавира (IX в.) пользуется формулой (6) и другими более сложными конечными рядами. Однако правило для нахождения суммы членов произвольной арифметической прогрессии впервые встречается в «Книге абака» (1202) Леонардо Пизанского. В «Науке о числах» (1484) Н. Шюке, как и Архимед, сопоставляет арифметическую прогрессию с геометрической и дает общее правило для суммирования любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Формула для суммирования бесконечно убывающей геометрической прогрессии была известна П. Ферма и другим математикам XVII в.

Слово «прогрессия» латинского происхождения (*progressio*), буквально означает «движение вперед» (как и слово «прогресс») и встречается впервые у римского автора Боэция (V—VI вв.). Первоначально под *прогрессией* понимали всякую числовую последовательность, построенную по закону, позволяющему неограниченно продолжать ее в одном направлении, например последовательности натуральных чисел, их квадратов и кубов. В конце средних веков и в начале нового времени этот термин перестает быть общеупотребительным. В XVII в., например, Дж. Грегори употребляет вместо прогрессии термин «ряд», а другой видный английский математик, Дж. Валлис, применяет для бесконечных рядов термин «бесконечные прогрессии».

В настоящее время мы рассматриваем прогрессии как частные случаи числовых последовательностей.

§ 12. СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

11. О понятии степени с рациональным показателем

Некоторые наиболее часто встречающиеся виды трансцендентных функций, прежде всего показательные, открывают доступ ко многим исследованиям.

Л. Эйлер

Из практики решения все более сложных алгебраических задач и оперирования со степенями возникла необходимость обобщения понятия степени и расширения его посредством введения в качестве показателя нуля, отрицательных и дробных чисел.

Равенство $a^0 = 1$ (для $a \neq 0$) применял в своих трудах в начале XV в. самаркандский ученый ал-Каши. Независимо от него нулевой показатель был введен Н. Шюке в XV в. Последний ввел и отрицательные показатели степени. Идея дробных показателей содержится у французского математика Н. Орема (XIV в.) в его труде «Алгоризм пропорций». Вместо нашего знака $2^{\frac{1}{2}}$ он писал

$\frac{1}{2}2'$, вместо $4^{\frac{1}{2}}$ он писал $\boxed{1'\frac{1}{2}}4$. Орем словесно формулирует правила действий со степенями, например (в современной записи):

$$(a^n)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{m}}, \quad a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} \text{ и т. п.}$$

Позже дробные, как и отрицательные, показатели встречаются в «Полной арифметике» (1544) немецкого математика М. Штифеля и у С. Стевина. Последний пишет о том, что корень степени n из числа a можно считать как степень a с дробным показателем

$$\frac{1}{n} \ (a > 0).$$

О целесообразности введения нулевого, отрицательных и дробных показателей и современных символов впервые подробно писал в 1665 г. английский математик Джон Валлис. Его дело завершил И. Ньютон, который стал систематически применять новые символы, после чего они вошли в общий обиход.

Введение степени с рациональным показателем является одним из многих примеров обобщения понятия математического действия. Степень с нулевым, отрицательным и дробным показателями определяется таким образом, чтобы к ней были применимы те же правила действий, которые имеют место для степени с натуральным показателем, т. е. чтобы сохранились основные свойства первоначально определенного понятия степени, а именно:

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad (a^m)^n = a^{mn},$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Новое определение степени с рациональным показателем не противоречит старому определению степени с натуральным показателем, т. е. смысл нового определения степени с рациональным показателем сохраняется и для частного случая степени с натуральным показателем. Этот принцип, соблюдаемый при обобщении математических понятий, называется принципом перманентности (сохранения, постоянства). В несовершенной форме его высказал в 1830 г. английский математик Дж. Пикок, полностью и четко его установил немецкий математик Г. Ганкель в 1867 г. Принцип перманентности соблюдается и при обобщении понятии числа и расширении его до понятия действительного числа, а до этого — при введении понятия умножения на дробь и т. п.

12. Степенная функция и графическое решение уравнений и неравенств

Благодаря открытию метода координат и аналитической геометрии начиная с XVII в. стало возможным общепримени мое графическое исследование функций и графическое решение уравнений.

Степенной функцией называют функцию вида

$$y = x^{\alpha}, \tag{1}$$

где α — постоянное вещественное число. Вначале мы ограничимся, однако, лишь рациональными значениями α и вместо равенства (1) запишем:

$$y = x^{r}, \tag{2}$$

где r — рациональное число. Для $r = 0$ и $r = 1$ по определению соответственно имеем:

$$y = 1, \quad y = x.$$

Графиком первой из этих функций на плоскости является прямая, параллельная оси Ox, а второй — биссектриса 1-го и 3-го координатных углов.

При $r = 2$ графиком функций является парабола $y = x^2$. Декарт, который первое неизвестное обозначал через z, второе — через y, третье[1] — через x, записывал уравнение параболы так: $z^2 = x$ (z — абсцисса). Параболой он часто пользовался для решения уравнений. Чтобы решить, например, уравнение 4-й степени

$$z^4 - pz^2 + qz - r = 0, \tag{3}$$

Декарт с помощью подстановки

$$z^2 = x \tag{4}$$

получил квадратное уравнение с двумя неизвестными:

$$x^2 + z^2 - (p + 1)x + qz - r = 0, \tag{5}$$

изображающее окружность, расположенную в одной плоскости (zx) с параболой (4). Таким образом, Декарт, вводя вторую неизвестную (x), разбивает уравнение (3) на два уравнения (4) и (5), каждое из которых представляет определенное геометрическое место точек. Ординаты точек их пересечения и дают корни уравнения (3).

Задача 29. «Решить графически уравнение $z^4 - pz^2 + qz - r = 0$ методом Декарта для $p = -1$, $q = 0$, $r = 9$».

Указание. Начертите непосредственно параболу $z^2 = x$ и окружность $x^2 + z^2 = 9$ с центром в начале координат и радиусом, равным 3.

---

[1] Вскоре буква x стала, однако, применяться в качестве первой неизвестной, что, возможно, объясняется наличием ее в больших количествах в типографиях.

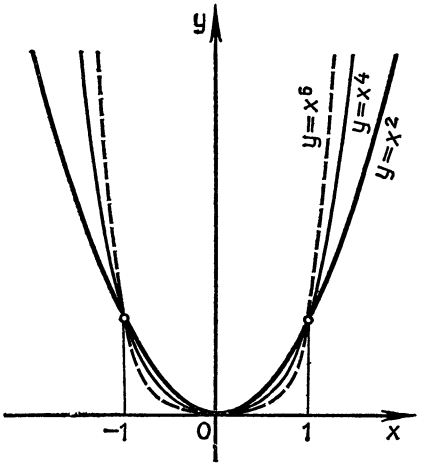


Рис. 20

Декарт, как и Ферма, часто пользовался параболой и по возможности окружностью для построения корней уравнений, так как старался прибегать к вспомогательным кривым более низкого порядка. Ньютон же, наоборот, руководствовался в таких случаях не степенью уравнения вспомогательной кривой, а легкостью ее вычерчивания. При графическом решении, например, уравнений 4-й степени он предпочитал не параболу, а эллипс.

Не только при $r = 2$, но вообще при $r = 2n$ (т. е. $r = 2, 4, 6, \ldots$) график степенной функции есть *парабола* (рис. 20). Функция монотонно возрастает на полусегменте $[0; +\infty[$ и убывает на полуинтервале $]-\infty; 0]$. В интервале $(0; 1)$ парабола $y = x^2$ лежит ниже биссектрисы $y = x$. Парабола $y = x^2$ расположена ниже параболы $y = x^4$ в интервале $(1; \infty)$.

При $r = 3$ соответствующее уравнение $y = x^3$ изображает так называемую *кубическую параболу*. Эту кривую французский математик, отец начертательной геометрии, Г. Монж (1746—1818) использовал для построения действительных корней кубических уравнений. График этой функции, как и вообще степенной функции с натуральным нечетным показателем ($y = x^{2n+1}$), представленный на рисунке 21, говорит о том, что функция монотонно возрастает на интервале $(-\infty, \infty)$, т. е. при всех значениях x: при положительных значениях x значения функции положительны, а при отрицательных — отрицательны: кубическая парабола, как и $y = x^2$, касается оси Ox. Кубическая парабола применяется в технике, например на железнодорожных линиях, как вставка, смягчающая крутой поворот от прямолинейного к круговому участку пути.

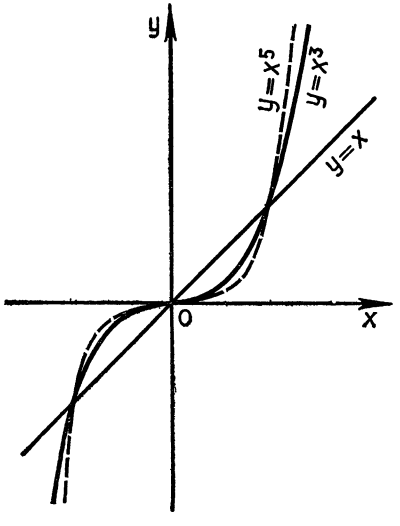


Рис. 21

И. Ньютон обобщил понятие параболы, назвав параболическими кривыми все линии, изображаемые уравнением

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots + px^n.$$

Ныне термин *параболические кривые* применяют обычно для линий, изображаемых уравнением

$$y = cx^m,$$

где c — положительное вещественное число, m — положительное рациональное. При $m < 0$ имеем так называемые *гиперболические кривые.*

13. О приведении знаменателя или числителя дроби к рациональному виду

Некоторые способы, ныне применяемые для преобразования дроби так, чтобы ее знаменатель (числитель), представляющий собой квадратный радикал или сумму двух радикалов, был приведен к рациональному виду, восходят к древности. В средние века эти способы были распространены на сумму трех и больше радикалов.

Вот один пример из «Суммы...» Пачоли.

Задача 30. «Привести к рациональному виду знаменатель дроби:

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{8}}\gg.$$

Сципионе дель Ферро приводит к рациональному виду числитель $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}$ одной дроби, пользуясь тождеством

$$-(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})\ (\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{12}-2-$$
$$-\sqrt[3]{6})\cdot(81+\sqrt[3]{419\,904}+\sqrt[3]{722\,392})=81. \qquad (1)$$

Задача 31. Проверьте тождество (1).

Н. Тарталья решал примеры, в которых фигурирует сумма 4, 5 и 6 радикалов.

14. О показательной функции

Расширение понятия степенной функции (см. п. 12) $y = a^\alpha$, где α — иррациональное и вообще любое действительное число, позволяет рассматривать показательную функцию вида

$$y = a^x, \qquad (1)$$

где $a > 0$, x —любое действительное число[1].

[1] Показательной называют иногда и более общую функцию $y = ka^x$, где k — постоянный коэффициент.

Еще в 1679 г. Лейбниц в одном из своих писем к голландскому физику и математику Христиану Гюйгенсу рассматривал уравнения вида $x^x + z^z = c$, $x^x - x = 24$ и т. п.

Примерно в то же время аналогичными уравнениями занимался Иоганн Бернулли. Ученик последнего, Л. Эйлер, посвятил «показательным и логарифмическим количествам» две главы «Введения в анализ» и другие труды. «Показательные количества, — писал Эйлер, — разнообразны, смотря по тому, будет ли переменным количеством один только показатель или, кроме того, еще и само возвышаемое количество; к первому роду относится a^z, ко второму y^z, даже и сам показатель может быть показательным количеством, как в выражениях a^{a^z}, a^{y^z}, y^{a^z}, x^{y^z}. Мы не будем останавливаться на дальнейшем подразделении этих количеств, так как природа их может быть понята достаточно ясно, если мы разберем только первый вид a^z»[1].

Одним из замечательных достижений Эйлера было установление связи между показательной и тригонометрическими функциями.

Показательная функция находит важнейшие применения при изучении природных и общественных явлений. Известно, например, что при распадении радиоактивного вещества его масса m уменьшается за равные промежутки времени в одинаковое число раз. Если обозначить через t_0 (период полураспада) промежуток времени, необходимый для того, чтобы от первоначальной массы вещества m_0 осталась половина ее, то оставшаяся через t лет масса выразится так:

$$m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_0}}, \qquad (2)$$

т. е. радиоактивный распад (изменение количества вещества в зависимости от времени) совершается по закону, выражаемому показательной функцией. Если взять, к примеру, уран-238, то для него $t_0 = 4{,}5$ млрд. лет. Поскольку возраст Земли исчисляется примерно в 5—7 млрд. лет, то можно утверждать, что в наши дни не распалась и половина всех запасов этого вещества.

Другим примером может служить размножение живых организмов[2] — явление, при описании которого прибегают к показательной функции.

---

[1] См.: Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. М., 1956, т. I, с. 87.

[2] См.: Ашкинузе В. Г., Шоластер Н. Н. Алгебра и элементарные функции. М., 1964, с. 298.

§ 13. ДЕСЯТИЧНЫЕ ЛОГАРИФМЫ

Изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь...

Лаплас

15. Связь показательной функции с логарифмической. Развитие идеи логарифмов до Бюрги

Изложив некоторые свойства показательной функции, Эйлер писал: «Как по любому значению z может быть найдено значение y, соответствующее данному числу a, так и, обратно, можно найти значение переменного z, соответствующее любому заданному положительному значению переменного y так, чтобы $a^z = y$. Это значение переменного y, поскольку z рассматривается как функция y, обычно называется *логарифмом* переменного y. Итак, учение о логарифмах предполагает, что вместо a подставлено определенное постоянное число, которое поэтому носит название основания логарифмов: когда оно принято, то логарифмом любого числа y будет показатель степени a^z, такой, что сама степень a^z будет равна числу y; логарифм числа y обычно обозначается через $\mathrm{l}y$. Итак, если

$$a^z = y, \text{ то } z = \mathrm{l}y;$$

отсюда понятно, что хотя основание логарифмов и зависит от нашего выбора, однако оно должно быть числом большим, чем единица; отсюда, можно получить в виде действительных чисел логарифмы положительных чисел»[1].

Читая Эйлера, нам кажется, что имеем дело с обычным учебником наших дней. Ведь перед нами тот же способ введения понятия логарифма, то же определение логарифмической функции как обратной показательной функции, тот же термин «основание логарифмов». Все это нововведения самого Эйлера и идут именно от него.

Не так было до него.

Изобретение логарифмов в начале XVII в. тесно связано с развитием в XVI в. производства и торговли, астрономии и мореплавания, требовавших усовершенствования методов вычислительной математики. Все чаще требовалось быстро производить громоздкие действия над многозначными числами, все точнее и точнее должны были быть результаты действий. Вот тогда-то и нашла воплощение идея логарифмов, ценность которых состоит в сведении сложных действий III ступени (возведения в степень и извлечения корня) к более простым действиям II ступени (умножению и делению), а последних — к самым простым, к действиям I ступени (сложению и вычитанию).

---

[1] См.: Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. М., 1961, т. I, с. 80—90.

Происхождение этой идеи связано с сопоставлением двух числовых последовательностей следующего вида:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots, \tag{1}$$

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ \ldots, \tag{2}$$

Первая — последовательность натуральных чисел — представляет собой арифметическую прогрессию, вторая — геометрическую. Произведение любых двух членов последовательности (2) является членом этой же последовательности, получаемым путем возведения a в степень, равную сумме соответствующих членов первой последовательности. Эта идея была четко выражена еще в «Исчислении песчинок» Архимеда. Сопоставлением последовательностей (1) и (2) в целях умножения и деления чисел ряда (2) пользовались Шюке, Пачоли и др.

В «Полной арифметике» (1544) М. Штифель продолжает ряды (1), (2) и влево, т. е. включает отрицательные члены и впервые называет члены ряда (1) *экспонентами*, т. е. показателями соответствующих членов ряда (2). При этом он пишет: «Сложение в арифметическом ряде соответствует умножению в геометрическом, равным образом вычитание в первом — делению во втором; простому умножению в арифметическом ряде соответствует умножение на себя (возведение в степень) в геометрическом ряде, а деление в арифметическом ряде — извлечению корня в геометрическом ряде, в частности, деление пополам — извлечению квадратного корня».

Таким образом, уже в середине XVI в. были разработаны основы учения о логарифмах. Не хватало, однако, полезных, конкретных методов для широкого практического применения этих основ в вычислительной математике, не хватало основанных на осознанной идее логарифмических таблиц. В конце XVI в. Симон Стевин опубликовал таблицу для вычисления сложных процентов, необходимость вычисления которых была вызвана ростом торгово-финансовых операций. Как известно, формула сложных процентов такова:

$$A = a\left(1 + \frac{P}{100}\right)^t, \tag{3}$$

где a — первоначальный капитал, A — наращенный капитал после t лет при $P\%$. Таблица Стевина содержала значения выражений $\left(1 + \frac{P}{100}\right)^t$, при этом $\frac{P}{100} = r$ Стевин уже выражал в десятичных дробях: 0,04; 0,05; ..., которые он впервые в Европе открыл.

Сам Стевин, как это ни странно, не заметил того, что его таблицами можно пользоваться для упрощения соответствующих вычислений. Это увидел, однако, один из его современников — Бюрги.

Таблицы Стевина явились для швейцарца И. Бюрги стимулом к составлению первых логарифмических таблиц.

16. Таблицы Бюрги

Талантливый математик И. Бюрги (1552—1632) не был профессиональным ученым и латинского языка, господствовавшего в те времена в трудах ученых, не знал. Он был искуснейшим часовым мастером и механиком. В 1603 г. по приглашению императора Рудольфа II он прибыл в Прагу, где стал работать придворным часовщиком и мастером по астрономическим инструментам. Его пребывание в Праге совпало по времени с пребыванием там знаменитого ученого Иоганна Кеплера, открывшего законы движения планет. Бюрги усердно помогал Кеплеру в астрономических наблюдениях и вычислениях, посвятив всю свою жизнь вычислениям.

Деятельность Бюрги была высоко оценена Кеплером, который неоднократно безрезультатно призывал скромного и осторожного Бюрги опубликовать свои изобретения.

Для того чтобы, опираясь на сопоставление прогрессий (1), (2), перейти к составлению практически удобной таблицы логарифмов, перед Бюрги стояли две задачи. Первая: сделать так, чтобы ряд (2) охватил по возможности больше чисел. Если взять, например, основание $a = 2$, то можно получить логарифмы для довольно «редкого» ряда чисел: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024,... . Для практических вычислений таблица логарифмов только этих чисел далеко не достаточна. Нетрудно заметить, что, чем ближе будет основание a к 1, тем больше чисел будет охвачено таблицей. Вот почему Бюрги, подобно Стевину, берет в качестве основания $a = 1 + r$, полагая $r = \frac{1}{10^4} = 0{,}0001$. Таким образом, в качестве ряда (2) он берет геометрическую прогрессию, в которой знаменатель равен $1\frac{1}{10^4}$, и составляет таблицу степеней $(1 + r)^n$. Неявно предполагая непрерывность соответствия между рядами (2) и (1), Бюрги применил в своей таблице интерполяцию. Члены ряда (2) Бюрги назвал «черными» числами, члены же ряда (1) — «красными» числами, потому что в его таблице они были даны двумя красками.

Вторая трудная задача, стоявшая перед Бюрги, заключалась в следующем: при последовательных умножениях, необходимых для вычислений $(1{,}0001)^n$ при $n = 1, 2, 3, 4, 5,...$, число знаков произведений быстро растет, сохранять их все практически невозможно. Требуется округлять результаты, ограничиваясь приближенными числами. Округление, однако, следует вести крайне внимательно и осторожно, для того чтобы при дальнейших вычислениях не накопились грубые ошибки. Бюрги констатировал, что, чем «плотнее» ряд (2), тем меньше погрешности в вычислениях.

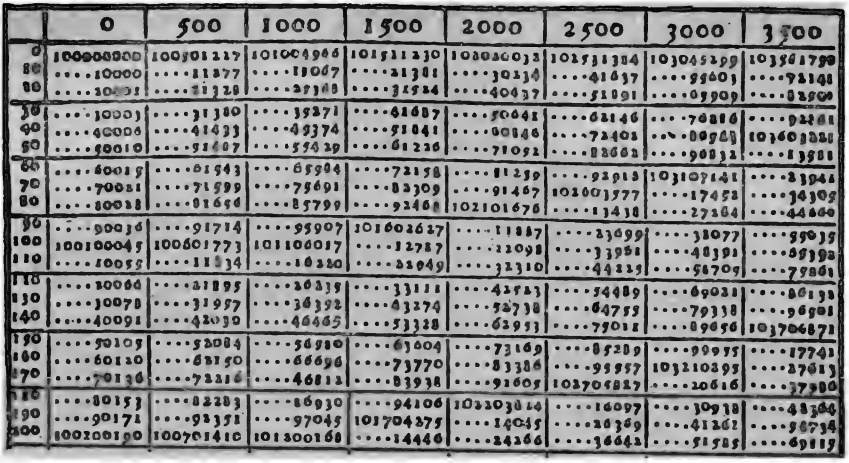


Рис. 22. Часть страницы из таблиц Бюрги

Фактически он составил таблицу (рис. 22) чисел $10^8\,(1{,}0001)^n$, придавая n последовательно[1] значения 10, 20, 30, ..., т. е. вместо рядов (1) и (2) рассматривал ряды

$$0,\qquad 10\qquad 20,\ \ldots\ldots$$
$$10^8,\quad 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^1,\quad 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^2,\ \ldots\ .$$

«Черные» числа он вычислил с 9 знаками и довел до 10^9; число это он назвал «полным черным» числом. Ему соответствует «полное красное» число 230 270 022, т. е. $10^8\,(1+0{,}0001)^{230270022}\approx 10^9$.

Бюрги вложил в составление таблицы огромнейший труд. Одних умножений громоздких чисел на 1,0001 пришлось произвести свыше 200 млн. раз. Восемь лет жизни отдал Бюрги составлению таблицы. Начав вычисления в 1603 г., он завершил их в 1611 г. «Таблицы арифметической и геометрической прогрессии с обстоятельным наставлением, как пользоваться ими при всякого рода вычислениях» (рис. 23) были первыми, пока не опубликованными таблицами логарифмов. Они явились новым мощным средством вычислений и имели огромные преимущества над старыми и отсталыми вычислительными способами.

Бюрги не торопился сдать в печать свой труд, что оказалось для него роковым. Благодаря настоянию Кеплера таблица Бюрги была все же опубликована в Праге в 1620 г. Хотя она была высоко оценена отдельными учеными и сыграла известную роль в раз-

[1] Множитель 10^8 служил для того, чтобы по возможности избегать дробей. Детальное обоснование см.: Маркушевич А. И. Ряды. Элементарный очерк. М., 1957, с. 127—133.

витии вычислительной математики, широкого распространения не получила. Причин было несколько. Таблица Бюрги была малоудобной. Одно из неудобств ее состояло в том, что по существу она представляла собой таблицу не логарифмов, а антилогарифмов. Достаточно разделить «черные» числа на 10^8, чтобы они представляли собой антилогарифмы «красных» чисел по основанию 1,0001. Другим неудобством было то, что при пользовании этими таблицами часто приходилось прибегать к громоздким интерполяциям. Однако важнейшей причиной ограниченного успеха таблицы Бюрги явилось то, что еще за 6 лет до ее опубликования появилась в печати более совершенная таблица логарифмов шотландского математика Джона Непера[1].

Рис. 23. Таблицы Бюрги, напечатанные в Праге в 1620 г.

17. Таблицы Непера

Джон Непер не был математиком по профессии. Он был любителем астрономии и математики. Непер обладал небольшим имением, в котором занимался земледелием и изобретением разных механических приборов. Он был довольно известен как противник католицизма. Написанная им в 1593 г. книга «Ясное толкование всего откровения св. Иоанна» направлена против римского папы. Она была изложена по образцу геометрических трактатов и пользовалась большим успехом в Англии, а также за ее пределами. Во время своего путешествия за границу Непер познакомился с астрономическими и тригонометрическими произведениями Регномонтана, Питиска и других европейских ученых. Занимаясь тригонометрией, Непер вывел несколько формул для решения сферических треугольников.

Как уже сказано, усовершенствование способов вычисления было одним из актуальнейших вопросов в начале XVII в. Усовершенствованием занимались не только профессионалы, но и любители. Упрощение вычислений было особенно важно для Англии, которая уже во второй половине XVI в. стремилась к колониальным захватам и к расширению заокеанской торговли. Английские

[1] Существуют и другие транскрипции этого имени: *Непир*, *Напир*.

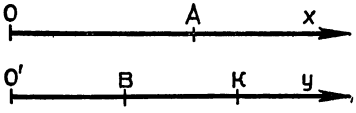


Рис. 24

мореплаватели нуждались в хороших астрономических таблицах. «Я всегда, — писал Непер, — старался, насколько мне позволяли мои силы и способности, избавляться от трудных и скучных вычислений, громоздкость которых обычно отпугивает многих от изучения математики».

Таблицы, составленные Непером, отличаются во многом от таблиц Бюрги; они не только обширнее и точнее, в них нашел воплощение замечательный с теоретической точки зрения замысел, представляющий по существу идею непрерывности. Геометрическая прогрессия, лежащая в основе таблиц Непера, не возрастает, а убывает. Знаменатель прогрессии, равный $1 - \frac{1}{10^7}$, ближе к 1, чем в таблице Бюрги. Такая медленно убывающая прогрессия дает возможность включить в таблицу большее количество чисел, сравнительно мало отличающихся по величине друг от друга. Для того чтобы для любого положительного числа мог быть вычислен его логарифм, Непер сформулировал идею непрерывности связи между числами и логарифмами. С помощью графически-кинематической схемы он так излагает свою идею.

Пусть на осях Ox и $O'y$ (рис. 24) движутся соответственно точки A, B, выходящие из O, O' с одинаковой скоростью c, и пусть на оси $O'y$ зафиксирована некоторая точка K. Движение точки A равномерное, для нее скорость c постоянная. Скорость же замедленно движущейся точки B непрерывно убывает пропорционально расстоянию $y = BK$. Какое расстояние ей остается еще пройти до точки K? Итак, за некоторый промежуток времени t_1 одновременно вышедшие из O соответственно O' точки A и B проходят неодинаковые расстояния: $OA_1 > O'B_1$, или (для соответствующих чисел) $x_1 > y_1$. Для другого промежутка времени $t_2 > t_1$ будем иметь: $OA_2 > O'B_2$, т. е. $x_2 > y_2$, . . . $x_i > y_i$. Можно доказать[1], что, при $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ будем иметь: $\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_4}{y_3}$, т. е. при одинаковой разности двух любых значений чисел x получим одинаковое отношение двух соответствующих значений чисел y. Это позволяет объяснить введенный Непером термин «л о г а р и ф м»: он образован от греческих слов «логос» — отношение[2] и «аритмос» — число. Числа x — логарифмы[3] — как бы определяют отношения соответствующих чисел y.

---

[1] См.: Г р и ш в а л ь д Л. Я. История открытия логарифмов. Харьков. 1952, с. 12.

[2] Также «слово».

[3] По существу идея Непера равносильна идее определения логарифмической функции через дифференциальное уравнение; см.: Ц е й т е н Г. Г. История математики в XVI — XVII вв. М., 1938, с. 146.

Общий член арифметической, соответственно геометрической прогрессии таблицы Непера можно представить ныне в виде $x_n = n(1 + 0{,}5 \cdot 10^{-7})$, $y = 10^{-7}(1 - 10^{-7})$, где $n = 0,1,2,3,\ldots$.

Умножением чисел на фактор 10^7 Непер, как и Бюрги, имел в виду избегать дробей[1]. В его таблице целыми являются как сами числа, так и логарифмы их. Следует учесть, что во времена Непера десятичные дроби еще не вошли в общее употребление.

Целью Непера было получение логарифмов не натуральных чисел, а тригонометрических функций. Если радиус тригонометрического круга считать равным 10^7, а y — соответствующей линией синуса, то $\frac{y}{10}$ есть синус-функция, всегда меньшая единицы. Аналогично и косинус-функция. Непер вычислил сначала значения чисел $y_p = 10^7(1 - 10^{-7})^p$, затем составил таблицы логарифмов синусов углов от 0 до 90°. На рисунке 25 представлена часть страницы из логарифмических таблиц Непера. Сверху указано 9 градусов, снизу 80. На странице 7 колонок. В 1-й и 7-й указано количество минут, во 2-й и 6-й даны значения синусов с семью знаками (синус 90° принят за 10^8), 3-я и 5-я колонки содержат восьмизначные логарифмы указанных значений синусов, 4-я колонка содержит разности логарифмов синусов дополнительных углов, стоящих в одной строке.

Gr. 9

9 min	Sinus	Logarithmi	Differentiæ	logarithmi	Sinus	
0	1564345	18551174	18427293	123881	9876883	60
1	1567218	18532826	18408484	124342	9876427	59
2	1570091	18514511	18389707	124804	9875971	58
3	1572964	18496231	18370964	125267	9875514	57
4	1575837	18477984	18352253	125731	9875056	56
5	1578709	18459772	18333576	126196	9874597	55
6	1581581	18441594	18314933	126661	9874137	54
7	1584453	18423451	18296324	127127	9873677	53
8	1587325	18405341	18277747	127594	9873216	52
9	1590197	18387265	18259203	128062	9872754	51
10	1593069	18369223	18240692	128531	9872291	50
11	1595941	18351214	18222213	129001	9871827	49
12	1598812	18333237	18203765	129472	9871362	48
13	1601684	18315294	18185351	129943	9870897	47
14	1604555	18297384	18166969	130415	9870431	46
15	1607426	18279507	18148619	130888	9869964	45
16	1610297	18261663	18130301	131362	9869496	44
17	1613168	18243851	18112014	131837	9869027	43
18	1616038	18226071	18093758	132313	9868557	42
19	1618909	18208323	18075533	132790	9868087	41
20	1621779	18190606	18057328	133268	9867616	40
21	1624649	18172924	18039177	133747	9867144	39
22	1627519	18155273	18021047	134226	9866671	38
23	1630389	18137654	18002948	134706	9866197	37
24	1633259	18120067	17984880	135187	9865722	36
25	1636129	18102511	17966842	135669	9865246	35
26	1638999	18084987	17948835	136152	9864770	34
27	1641868	18067495	17930859	136636	9864293	33
28	1644738	18050034	17912913	137121	9863815	32
29	1647607	18032604	17894997	137607	9863336	31
30	1650476	18015207	17877114	138093	9862856	30

80 min Gr. 8a

Рис. 25. Часть страницы из таблицы Непера

Составлению таблиц Непер посвятил около 20 лет своей жизни. Завершив работу над ними, он не мог не восторгаться сам величием своего изобретения и назвал их «удивительными», «чудесными». Такими они предстали и перед всем миром ученых и специалистов, когда в 1614 г. были опубликованы в Эдинбурге под вдохновенным заглавием «Описание удивительной таблицы логарифмов». Как настоящий ученый, Непер был скромным. Вот что он писал:

«... так как вычисление этой таблицы, которое должно было бы выполняться при участии многих вычислителей, сделано трудом одного человека, то не удивительно, если в нее вкрались мно-

[1] Стремясь к той же цели, еще раньше $R = 10^7$ использовал Региомонтан.

гие ошибки. Произошли ли эти ошибки вследствие утомления вычислителя или по небрежности типографа, за них прошу извинения у благосклонных читателей.

Однако если я увижу, что ученым приятна польза этого изобретения, то, может быть, в скором времени я дам объяснение способа, как улучшить это сочинение, чтобы трудом многих вычислителей выпустить его в свет более точно исполненным, чем было возможно для одного. Ничто сначала не бывает совершенным».

Непер сдержал слово. Он написал подробное объяснение, оно появилось на свет в 1619 г. Этот свой печатный труд автор не увидел. Непер умер в 1617 г.

Таблица Непера, первая печатная таблица логарифмов, сыграла огромную роль не только в астрономии, в прикладной математике, но и в математической науке в целом. Идея о непрерывности, положенная в основу определения неперовских логарифмов, является зародышем развившихся после него глубоких идей исчисления бесконечно малых, из которых выросло дифференциальное и интегральное исчисление.

В настоящее время неперовыми иногда называют натуральные логарифмы, в основании которых лежит число e. В действительности неперовы логарифмы — это не натуральные[1]. Таблицы натуральных логарифмов составил и издал в 20-х годах XVII в. другой английский математик — Джон Спейдель. Связь между неперовыми логарифмами (LN) числа y и его натуральным логарифмом (ln) может быть приближенно выражена следующей формулой:

$$LNy \approx 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{y}\right).$$

Несмотря на все свои преимущества, таблицы Непера были еще далеки от наших современных логарифмических таблиц. В них $\log 1 \neq 0$, а $\log 10^8 = 1$, что приводило к осложнениям при пользовании таблицей, так как приходилось вычислять и мантиссу, и характеристику. В вышеупомянутом посмертном сочинении Непера, вышедшем в 1619 г. под названием «Устройство удивительных таблиц логарифмов», автор уже высказал идею создания более удобных десятичных логарифмов. Идея создания десятичных логарифмов была осуществлена одним из его друзей — Бриггсом.

---

[1] У Непера основание логарифмов близко к $\frac{1}{e}$. Логарифмы при основании $\frac{1}{e}$ отличаются от логарифмов при основании e лишь знаком. При основании $\frac{1}{e}$, меньшем единицы, все числа, меньшие единицы, имеют положительные логарифмы, что было очень важно для Непера, таблицы которого содержали логарифмы $\sin x$ и $\cos x$ чисел, меньших единицы. О названии «натуральные логарифмы» и о числе e см.: Ашкинузе В. Г., Шоластер Н. Н. Алгебра и элементарные функции. М., 1964, с. 307—309.

18. Таблицы десятичных логарифмов

Генри Бриггс был профессором Лондонского, а затем Оксфордского университетов. Он занимался астрономией, тригонометрией, географией и был известен как непримиримый противник астрологии и вдохновенный пропагандист идей Кеплера. Еще задолго до французской буржуазной революции конца XVIII в. Бриггс в некоторых своих трудах пользуется центезимальным делением угла.

Следуя советам Непера, горячим поклонником которого он был, Бриггс уже в 1617 г. опубликовал таблицу десятичных логарифмов чисел до 1000, а в 1624 г. издал под названием «Логарифмическая арифметика» обширные 14-значные таблицы десятичных логарифмов чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000. Составление этих таблиц потребовало от Бриггса большой вычислительной работы и немало изобретательности. Долгое время таблицы десятичных логарифмов называли «бриггсовыми». В таблицах Бриггса был, однако, большой пропуск чисел между 20 000 и 90 000. Этот пробел был заполнен математиком-любителем, голландским книготорговцем Андрианом Влакком, который в 1628 г. издал десятичные таблицы логарифмов чисел от 1 до 100 000. Эти таблицы, переизданные Влакком в 1633 г., быстро распространились повсюду. По их образцу были изданы впоследствии аналогичные таблицы, в которых число знаков изменялось от 5 до 48. Простота и другие преимущества в вычислениях с помощью десятичных логарифмов сразу же вытеснили таблицы, предложенные Непером.

В России первые таблицы логарифмов были составлены А. Фархварсоном, С. Гвином и Л. Магницким по образцу таблиц Влакка и появились в печати в 1703 г., том самом, в котором была издана и «Арифметика» Л. Магницкого. Эти первые русские таблицы логарифмов были переизданы в 1716 г. За ними последовали и другие.

Большое распространение нашли в XVIII—XIX вв. впервые опубликованные в 1783 г. семизначные таблицы югославского[1] ученого Георга Веги (1754—1802) и его же «Полное собрание» — десятизначные таблицы для астрономов и геодезистов. Таблицы Г. Веги переиздавались и в XX в. Последнее русское издание семизначных таблиц Г. Веги относится к 1949 г. В настоящее время в школе пользуются четырехзначными таблицами (В. М. Брадиса) и др., поскольку установлено, что в большинстве случаев в школьной практике большей точности не требуется.

---

[1] Югославские земли в то время входили в состав Австрийской империи. Подробнее о Г. Веге и его таблицах см.: Депман И. Я. Замечательные славянские вычислители Г. Вега и Я. Ф. Кулик — ИМИ, 1953, вып. VI.

Дальнейшим развитием учения о логарифмах мы обязаны Л. Эйлеру. Он не только дал новое определение логарифму, но и распространил это понятие на комплексные числа.

Трудно переоценить значение изобретения логарифмов в деле упрощения и облегчения крайне необходимых для прогресса производства, науки и техники вычислительных работ. Недаром же сказал французский математик П. С. Лаплас, что «изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь...». Не меньшее значение имело изобретение логарифмов для развития теоретических вопросов математики. Возникнув из практических нужд вычислителей, астрономов и мореплавателей, идея логарифма привела в XVIII—XIX вв. к развитию учения о показательной и логарифмической функциях и других математических теорий, которые в свою очередь открыли возможность для новых практических применений.

Таким образом, история логарифмов еще раз показывает ту большую роль, которую играют практика и техника в развитии науки о природе, и подтверждает марксистско-ленинский тезис о неразрывном единстве теории и практики.

История логарифмов говорит о том, что великие открытия являются результатом труда не одного человека и даже не одного поколения. Она убеждает нас в том, что научные открытия не являются плодом одной лишь гениальности или выдающихся способностей ученого; они являются результатом гигантского труда, огромного напряжения мысли и воли к достижению цели.

* * *

Термины и символы. О термине «логарифм», введенном Непером, говорилось выше (см. гл. 1, 16). Термин «характеристика» встречается впервые в «Логарифмической арифметике» Бриггса. Латинское слово mantissa (дословно — добавление, придаток) было впервые употреблено Дж. Валлисом в «Алгебре» (1698) для обозначения дробной части десятичного числа. В современном смысле этот термин впервые стал употреблять Л. Эйлер в своем «Введении в анализ». Любопытно отметить, что Гаусс стал снова употреблять это слово в том же смысле, что и Валлис, однако в дальнейшем победило то специфическое значение, которое придал этому слову Л. Эйлер.

Непер не пользовался символом для слова «логарифм» и писал его полностью. Так поступил и Бриггс. Лишь в 1620 г. Гритер, а в 1624 г. Кеплер применяют знак Log, другие ученые — букву L или l. Эйлер и другие математики XVIII в. применяют знак log или l. В 1821 г. Коши предложил пользоваться символом log исключительно для десятичных логарифмов, а символом l для логарифмов любого другого основания. Современные обозначения вошли в употребление в конце XIX в.

19. О счетной линейке

Идея счетной логарифмической линейки как вспомогательного средства для производства вычислений была заложена в первых же таблицах логарифмов. Первая счетная линейка, изобретенная английским ученым Эдмондом Гунтером, появилась в 1624 г., т. е. через 10 лет после появления первой таблицы логарифмов и одновременно с появлением первой таблицы десятичных логарифмов. Линейка Гунтера не имела вначале движка и состояла только из одной логарифмической шкалы. Складывая и вычитая отрезки этой шкалы с помощью измерительного циркуля, автор выполнял действия умножения и деления. В 1627 г. английский математик Вильям Оутред пользовался счетной линейкой в виде круга; он же, как предполагают, впервые применил пару логарифмических шкал в линейке. Однако лишь в 1657 г. второй шкале была придана близкая к современной форма движка. В 1671 г. новый счетный прибор был несколько видоизменен англичанином Пестриджем, который и ввел для него название «линейка». В 1851 г. французский инженер А. Мангейм усовершенствовал счетную линейку изобретением «бегунка». В России в 1730 г. вышла «Книжица о сочинении и описании сектора, скал обыкновенной и гунтерской со употреблением оных инструментов в решении различных математических проблем». В ней содержится и описание логарифмической шкалы.

В XIX—XX вв. появились различной формы и длины счетные линейки, однако наибольшее значение имеют в настоящее время так называемые «нормальные» линейки длиной 25 см. Такие линейки, имеющие по 6—7 шкал и дающие возможность производить не только умножение и деление, но и возведение в степень, извлечение корня и другие действия, изготовляются в СССР под разными марками: «Прометей», «Металлометр» и др. Они позволяют находить результат вычислений с точностью (трех, иногда и четырех значащих цифр), которая является достаточной в большинстве технических расчетов.

Счетная линейка, изобретенная 300 с лишним лет назад, получила после ряда усовершенствований широчайшее распространение лишь в XX в. Еще в XIX в. логарифмические таблицы были основным средством вычислений, в XX в. их потеснила логарифмическая линейка, а затем портативный микрокалькулятор. Сотни тысяч инженеров, конструкторов и других специалистов нашей страны еще продолжают пользоваться при технических расчетах счетной линейкой. Она обладает целым рядом достоинств: будучи удобной и общедоступной по размерам и стоимости, линейка дает огромный выигрыш во времени и в затрате сил, необходимых для выполнения вычислений, и позволяет находить надежные результаты.

Глава 4
ГЕОМЕТРИЯ

Геометрия не дает истинного представления о физическом пространстве, а только служит для изучения возможных пространств.

Моррис Клайн

§ 14. ПОВОРОТЫ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

20. О происхождении тригонометрии

Слово «тригонометрия»[1] (от греческих слов «тригонон» — треугольник и «метрео» — измеряю) означает «измерение треугольников». Возникновение тригонометрии связано с развитием астрономии — науки о движении небесных тел, о строении и развитии Вселенной — и географии.

Астрономия — одна из древнейших наук, в свою очередь возникшая из потребности знать сроки смены времен года, измерять и считать время, иметь календарь. Одним из стимулов развития астрономии были путешествия по суше и по морю, вызванные разными потребностями, в первую очередь торговлей. Солнце днем, Луна, планеты и звезды ночью испокон веков служили человеку для определения не только часа дня и времени года, но и положения корабля в открытом море и для указания правильного пути караванам в пустыне.

Астрономия зародилась и развивалась в Вавилоне, Египте, Китае, Индии и других странах древности. В результате произведенных астрономических наблюдений возникла необходимость определения положения светил, вычисления расстояний и углов. Так как некоторые расстояния, например от Земли до планет, нельзя было измерить непосредственно, то ученые стали разрабатывать приемы нахождения взаимосвязей между сторонами и углами треугольника, у которого две вершины расположены на Земле, а третью представляет планета или звезда. Такие соотношения можно вывести, изучая различные треугольники и их свойства. Вот почему астрономические вычисления привели к решению (т. е. нахождению элементов) треугольника. Этим и занимается тригонометрия.

---

[1] Термин был впервые введен в 1595 г. немецким богословом-математиком Варфоломеем Питиском, известным в то время автором учебника тригонометрии и тригонометрических таблиц.

Зачатки тригонометрии обнаружены в сохранившихся документах Древнего Вавилона, где астрономия достигла значительного развития. Вавилонские ученые составили одну из первых карт звездного неба. Они умели предсказывать солнечные и лунные затмения. Некоторые сведения тригонометрического характера встречаются и в старинных памятниках других народов древности.

21. О тригонометрических таблицах

В Древней Греции тригонометрия как часть астрономии достигла значительного развития.

Древнегреческие ученые впервые поставили перед собой задачу решения прямоугольного треугольника, т. е. определения его элементов по трем данным элементам, из которых хотя бы один — сторона треугольника. Для решения этой задачи вначале составляли таблицы длин хорд, соответствующих различным центральным углам круга постоянного радиуса. Первые тригонометрические таблицы хорд были составлены астрономом-математиком *Гиппархом* из Никеи (II в. до н. э.). Гиппарх был основоположником математической географии, а кроме того, составил звездный каталог, довольно точно определил расстояние от Земли до Луны и ввел географические координаты — широту и долготу. Сочинения Гиппарха до нас не дошли. Но многие из них вошли

Рис. 26. Птолемей и Боэций (средневековый рисунок)

в «Альмагест»[1] — знаменитое сочинение древнегреческого астронома Клавдия Птолемея (II в.; рис. 26). Альмагест — классическое сочинение, в котором изложена античная теория движения небесных тел, геоцентрическая система мира. Эта система просуществовала до XVI в., когда появились труды Н. Коперника с изложением новой гелиоцентрической системы мира.

«Альмагест» содержит элементы прямолинейной и сферической тригонометрии, описание астрономических инструментов, звездный каталог таблиц хорд и др. Таблица хорд Птолемея составлена в шестидесятеричной системе счисления через полградуса от 0 до 180° и играла такую же роль, как таблица синусов (т. е. полухорд), так как синус есть половина хорды.

Таблицы *синусов* были введены индийскими астрономами, которые рассматривали и линию *косинуса*. Техника тригонометрических вычислений (применявшихся для решения прямоугольных треугольников) получила значительное развитие в Индии. Так, для синуса 3°45′ Бхаскара в своих таблицах указывает значение $\frac{100}{1529}$, которое дает семь верных десятичных знаков. Дальнейшего развития тригонометрические таблицы достигли в трудах ученых стран ислама, которые ввели понятие линии *тангенса*. Абу-л-Вафа (X в.) пользовался также величиной, обратной косинусу (секансом) и синусу (косекансом), и составил таблицу синусов через каждые 10′. Самые точные таблицы в начале XV в. были составлены ал-Каши. Большой точности таблицы тригонометрических функций составил Регномонтан (1436—1476) и другие европейские ученые XVI—XVIII вв.

В России первые тригонометрические таблицы были изданы в 1703 г. под названием «Таблицы логарифмов, синусов и тангенсов к научению мудролюбивых тщателей». В издании этих таблиц участвовал Л. Ф. Магницкий.

22. О тригонометрических функциях и о развитии тригонометрии.

Индийские ученые[2] положили начало учению о тригонометрических величинах, которые они рассматривали в пределах первой четверти круга. Синус и косинус встречаются в индийских астрономических сочинениях уже в IV—V вв. Заменив хорду синусом, индийцы вначале называли синус «ардхаджива», т. е. половина хорды («джива» — хорда, тетива лука), а позже — просто «Джива». Это слово было, как полагают, искажено арабами в «джайб», означающее по-арабски пазуха, выпуклость. Слово «джайб» было пе-

[1] «Альмагест» происходит от греческого слова «Мэгистэ» — великое, первое слово в полном названии сочинения Птолемея: «Великое математическое построение астрономии».

[2] См.: История математики от древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А. П. Юшкевича. М., 1970, т. 1, с. 199—201.

реведено в XII в. на латынь соответствующим словом sinus. Косинус индийцы называли «котиджива», т. е. синус остатка (до четверти окружности). В XV в. Регномонтан, как и другие математики, применял для понятия «косинус дуги (x)» латинский термин sinus complementi, т. е. синус дополнения, имея в виду $\sin(90 - x)$. От перестановки этих слов и сокращения одного из них (co-sinus) образовался термин «косинус», встречающийся в 1620 г. у английского астронома Э. Гунтера, изобретателя счетной линейки.

В IX—X вв. ученые стран ислама (ал-Хабаш, ал-Баттани, Абул-Вафа и др.) ввели новые тригонометрические величины: тангенс и котангенс, секанс и косеканс. В частности, ал-Баттани установил, что в прямоугольном треугольниике острый угол можно определить отношением одного катета к другому. Происхождение названий двух тригонометрических функций, тангенса и секанса (термины, введенные в 1583 г. немецким математиков Т. Финком), связано с геометрическим их представлением в виде отрезков прямых. Латинское слово tangens означает *касающийся* (отрезок касательной), secans — *секущий* (отрезок секущей). Термины «котангенс» и «косеканс» были образованы в средние века по аналогии с термином «косинус». Все три термина вырабатывались на протяжении веков и вошли во всеобщее употребление в первой половине XVII в.

Сферическая тригонометрия, непосредственно применявшаяся в астрономии, начала развиваться раньше плоской из подсобных глав астрономии и самостоятельно не существовала. Выдающийся ученый Насир ад-Дин ат-Туси (1201—1274), уроженец иранского города Тус, первый открыл путь к отделению тригонометрии от астрономии и выделению ее в самостоятельную дисциплину. Его труд «Китаб аш-шакл ал-кита» (книга о фигуре из секущих), называемый также «Трактатом о полном четырехугольнике», является первым в мире сочинением, специально посвященным тригонометрии. В нем достаточно полно изложено то, что было установлено раньше, а также отдельные исследования самого автора. Тригонометрический труд ат-Туси, как полагают некоторые ученые, оказал влияние на европейских математиков, в частности на Регномонтана.

В XV в. Регномонтан сыграл в Европе примерно ту же роль, какую играл Насир ад-Дин в странах ислама за двести лет до этого. Труд Регномонтана «Пять книг о треугольниках всех видов» в свою очередь имел большое значение для дальнейшего развития тригонометрии. Другие работы в области тригонометрии принадлежат Копернику, Виету, Кеплеру. Современный вид тригонометрия получила в трудах Леонарда Эйлера. Он разработал ее как науку о тригонометрических функциях, рассматриваемых как отношения соответствующих тригонометрических линий к радиусу. Это позволило понимать под аргументом тригонометрических функций как углы, дуги, так и отвлеченные числа. Эйлер установил несколько неизвестных до него формул и ввел единообразные

знаки. Впервые в его трудах встречаются записи $\sin x$, $\mathrm{tg}x$ и другие современные обозначения, в том числе и строчные буквы a, b, c для сторон треугольника и прописные буквы A, B, C — для противолежащих углов.

23. Расширение понятий угла и дуги

Понятие угла на протяжении веков не оставалось без изменений, оно обобщалось и расширялось под влиянием запросов практики и науки.

В «Началах» Евклида[1], как и в курсе школьной планиметрии, речь идет о плоских углах, меньших развернутого. Такие углы вполне достаточны для построения учения о треугольниках и выпуклых многоугольниках. Но уже при рассмотрении простых невыпуклых многоугольников мы встречаемся со сверхтупыми углами, заключенными между 180 и 360°. Наблюдения явлений вращения различных тел, изготовление определенных приборов измерения и т. п. привели к идее угла как величины, меры вращения луча вокруг точки от начального его положения. Такая точка зрения позволила обобщить понятие угла. С одной стороны, стало возможным рассматривать углы, большие 360°; с другой стороны, в зависимости от направления вращения стали различать положительные и отрицательные углы. Попутно и аналогично обобщалось и расширялось понятие дуги окружности.

Рассматривая дугу как путь, пройденный точкой, движущейся по окружности, стало возможным установить однозначное соответствие между множеством действительных чисел (B) и множеством точек окружности (O). Так пришли к числовой окружности (подобно числовой оси), называемой иногда тригонометрической окружностью. Следует, однако, учесть, что аналогия эта неполная: соответствие между множеством (B) и множеством точек числовой

---

[1] Евклид определяет плоский угол как «наклонение» двух прямых. В новое время было указано, что это не логическое определение, а тавтология, т. е. повторное наименование того же понятия другим, близким по смыслу словом.

В XIX в. встречаются в основном три разных определения угла: 1) в учебниках, в которых прямая определяется как линия *одного направления*, углом называют «различие направлений двух прямых». Это определение по существу тождественно с евклидовым; 2) *угол есть часть плоскости, заключенная между двумя исходящими из одной точки полупрямыми.* Это определение было введено швейцарским математиком Л. Бертраном в 1810 г., его придерживались до недавнего времени авторы, а кое-кто его употребляет и поныне; 3) *угол есть мера вращения в плоскости от одной его стороны к другой.*

В конце XIX в. появляется новое определение угла, содержащееся в «Основаниях геометрии» немецкого математика Давида Гильберта: *углом называется фигура, образованная двумя полупрямыми, исходящими из одной точки.* Это определение встречается и у других авторов, стремящихся рассматривать фигуры, образованные сначала одной, а затем двумя прямыми, до фигур, образованных тремя прямыми (треугольников).

оси взаимно однозначно, в то время как соответствие множества (B) и множества точек окружности (O) не взаимно однозначно. Действительно, каждой точке окружности соответствует бесконечное множество чисел, отличающихся друг от друга на $2\pi n$.

Если радиус тригонометрической (числовой) окружности равен 1, то имеем так называемую *единичную окружность*. Однако к записи формул при единичном радиусе стали переходить лишь со времен Эйлера.

24. Об измерении углов и дуг

Градусная система измерения углов, в которой за единицу принят угол, равный $\frac{1}{360}$ части угла, соответствующего полному обороту одной стороны угла около его вершины, восходит к III—II тысячелетиям до н. э., к периоду возникновения шестидесятеричной системы счисления в вавилонской математике.

Шестидесятеричное градусное измерение, как и шестидесятеричные дроби, проникло далеко за пределы ассиро-вавилонского царства и получило широкое распространение в странах Азии, Северной Африки и Западной Европы. Они применялись, в частности, в астрономии и связанной с ней тригонометрии.

Гиппарх, Птолемей и другие древнегреческие астрономы употребляли таблицы, в которых давались величины хорд, соответствующих данным дугам. Хорды (как и дуги) измерялись градусами, минутами и секундами, при этом один градус составлял обычно шестидесятую часть радиуса. Индийцы заимствовали через греков вавилонское градусное измерение дуг, но вместо хорд они измеряли линии синусов и косинусов. Градусным измерением пользовались и ученые стран Ближнего и Среднего Востока, внесшие большой вклад в развитие тригонометрии.

Выдающийся немецкий математик и астроном XV в. Регимонтан отступил от шестидесятеричного деления радиуса и за единицу измерения линии синуса принял одну десятимиллионную часть радиуса, что позволило выражать синусы целыми числами, а не шестидесятеричными дробями. Аналогично поступали и многие последовавшие за ним европейские математики.

Во время буржуазной революции конца XVIII в. во Франции была введена наряду с метрической системой мер и *центезимальная* (сотенная) система измерения углов, в которой прямой угол делился на 100 градусов, градус — на 100 минут, минута — на 100 секунд[1]. Эта система применяется и поныне в некоторых геодезических измерениях, но всеобщего употребления пока не получила.

[1] Как известно, в «Геометрии», написанной в 1823 г., Н. И. Лобачевский ввел метр и центезимальное деление угла, что послужило одной из причин обвинения Лобачевского в «неблагонадежности» и отказа царских органов власти печатать указанную книгу.

В связи с возникновением и развитием теории пределов и математического анализа с целью придать многим формулам возможно более простой вид в тригонометрии ввели *радианное* измерение дуг и углов. Термин «радиан» происходит от латинского radius — радиус.

25. Тригонометрические функции в Индии

Древнегреческие ученые не знали наших тригонометрических функций[1], вместо синуса они пользовались хордой, равной удвоенной линии синуса половинной дуги. Заметим, что греческое слово «хорде», от которого происходит наш термин «хорда», буквально означает «тетива лука».

Начало учению о тригонометрических величинах было положено в Индии Простая на первый взгляд замена хорды полухордой — синусом — открыла большие перспективы в развитии теории тригонометрических функций.

Кроме линий синуса DB и косинуса OD (рис. 27), индийские астрономы ввели еще одну величину: *обращенный синус* (термин, переведенный на латынь в XII в. словами sinus versus) DA — разность между радиусом окружности и ее косинусом. Сегодня мы бы записали:

$$\sin \text{ vers } \alpha = 1 - \cos \alpha.$$

В отличие от sinus versus европейские математики XII—XVI вв. часто называли синус sinus rectus (прямой синус), а радиус тригонометрической окружности sinus totus, т. е. *весь* (полный) *синус*.

Первые немногочисленные дошедшие до нас индийские произведения астрономо-тригонометрического содержания, названные «сиддханты» (науки), относятся к IV—V вв. В них, как и в трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. двадцатичетырехлетним математиком Ариабхаттой, уже встречаются синус, косинус и синус-версус. Индийские ученые рассматривали эти величины только для острого угла. Их вычисления сводились к рассмотрению лишь прямоугольных треугольников. Для этой цели они обычно разбивали косоугольные треугольники на ряд прямоугольных. Они знали и применяли некоторые зависимости между тригонометрическими величинами, в том числе простейшие соотношения:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha) \text{ и др.}$$

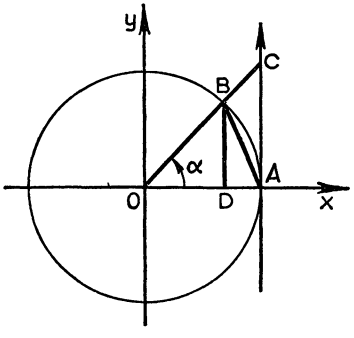


Рис. 27

[1] См. выше § 14, пп. 20—22.

Лишь ученые стран Среднего и Ближнего Востока ввели новые тригонометрические функции и с их помощью стали решать любые треугольники.

26. Тень и рождение тангенса

Начало культурных связей Индии с народами Ближнего и Среднего Востока (ныне Средней Азии, Ирана, Сирии, Ирака и Египта) восходит примерно к V в. н. э. В VIII в. была переведена на арабский язык одна из индийских «сиддхант», в IX—X вв. ученые стран арабского языка усвоили наряду со многими произведениями эллинистических стран и достижения индийской математики. Уделяя большое внимание вычислительной математике, астрономии и географии — наукам, связанным с нуждами торговли, составлением календаря и путешествиями, ученые стран ислама усердно развивали тригонометрию. Последняя нашла применение и в *гномонике* — учении *о солнечных часах*, одном из первых приборов, с помощью которого люди измеряли время. Солнечные часы представляли собой первоначально шест, вертикально воткнутый в землю (греческое слово «гномон» означает распознаватель). Время отсчитывалось по длине и направлению тени, отбрасываемой шестом. Циферблатом служила площадка с колышками, вбитыми в землю. Впоследствии с повышением точности измерения времени многие ученые древности (в том числе Аристарх Самосский, живший в IV—III вв. до н. э., которого называют «Коперником древнего мира», поскольку он учил о движении Земли вокруг Солнца и о вращении ее вокруг оси) и средних веков значительно усовершенствовали солнечные часы. В частности, применялись горизонтальные гномоны, перпендикулярные к вертикальной стене.

Один из современников ал-Хорезми — Ахмед ал-Марвази (уроженец Мерва[1]), названный ал-Хабаш ал-Хасиб, т. е. «Вычислитель», занимаясь вопросами гномоники и констатировав, что отношение длины u тени (рис. 28) к постоянной длине l гномона солнечных часов меняется в зависимости от высоты Солнца, измеряемой углом φ, принял $l = 60$ минутам $=1$ и составил таблицу значений тени u, соответствующих значениям углов $\varphi = 1°, 2°, 3°, \ldots$, т. е. (в современной символике) $u = l\,\mathrm{ctg}\varphi$, $u = \mathrm{ctg}\varphi$. (1) Таблица эта дала возможность определять высоту Солнца по длине тени. Для случая горизонтального гномона, перпендикулярного к вертикальной стене, ал-Хабаш составил таблицу *обращенных теней* (рис. 29), т. е. $u' = l\,\mathrm{tg}\varphi$, $u' = \mathrm{tg}\varphi$.

Итак, понятия «тангенс» и «котангенс», как и первые таблицы этих новых тригонометрических величин[2], родились не из рас-

[1] Мерв — один из древнейших и некогда цветущих городов Средней Азии, от которого после нашествия монголов в XIII в. остались одни руины (на территории Туркменской ССР; Новый Мерв — ныне Мары).

[2] В астрономическом трактате ал-Хорезми содержится первая на арабском языке таблица синусов и таблица тангенсов. Последняя считается, однако, позднейшим добавлением.

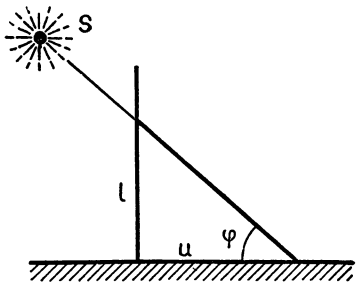


Рис. 28

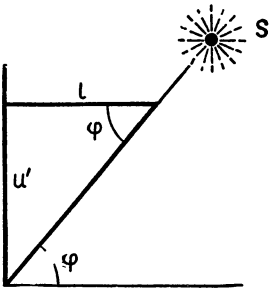


Рис. 29

смотрения тригонометрической окружности, а из учения о солнечных часах. Ал-Хабаш ввел и понятие «косеканс» также в связи с солнечными часами. Применение этих величин вскоре вышло далеко за пределы гномоники.

В своем астрономическом трактате «Усовершенствование Алмагеста» выдающийся сирийский астроном ал-Баттани (ок. 850—929) рассматривает уже все шесть тригонометрических величин: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс. В трактате мы находим следующие выраженные словами соотношения, которые мы даем в современной записи:

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{r}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{r}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \frac{\sin\alpha}{r}=\frac{r}{\operatorname{cosec}\alpha};$$

$$\frac{\cos\alpha}{r}=\frac{r}{\sec\alpha};\quad r\sec\alpha=\sqrt{r^2+r^2\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$r\operatorname{cosec}\alpha=\sqrt{r^2+r^2\operatorname{ctg}^2\alpha};\quad \frac{\sin\alpha}{r}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha}.$$

Если положить $r=1$, то записанные соотношения примут вид современных тригонометрических формул.

Живший в конце X в. в Багдаде замечательный математик Абу-л-Вафа впервые вводит в своей «Совершенной книге» (его «Алмагест») тригонометрические линии не через прямоугольный треугольник, а с помощью окружности, определяя, например, тангенс как отрезок касательной к окружности. В некоторых местах Абу-л-Вафа принимает радиус окружности за единицу.

В XII в. при переводе арабских произведений на латинский язык новые тригонометрические функции, котангенс и тангенс, были названы umbra recta — прямая тень и umbra versa — обратная тень (см. рис. 30 и 31). Термины tangens (тангенс, касающийся) и secans (секанс, секущий) были введены лишь в 1583 г. датским математиком Томасом Финком в связи с ролью этих линий на тригонометрической окружности. Термины «котангенс», «ко-

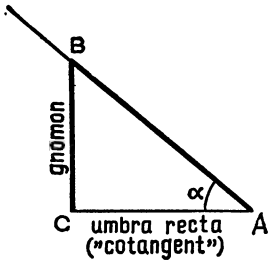


Рис. 30

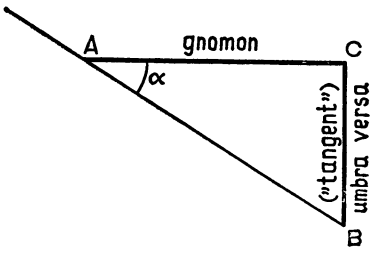


Рис. 31

секанс», образованные по аналогии с термином «косинус», встречаются впервые в 1620 г. у английского ученого Эдмунда Гунтера[1].

27. Тригонометрия — автономная ветвь математики

Развитие учения о тригонометрических функциях и широкое применение их в практике подготовили почву для отделения тригонометрии от астрономии и формирования ее как самостоятельной ветви математики.

«Трактат о полном четырехстороннике» крупнейшего математика XIII в. Насир ад-Дина ат-Туси (1260) до последнего времени считался первым систематическим курсом тригонометрии, изложенным независимо от астрономии. Однако недавно был обнаружен анонимный трактат, написанный в Исфахане до трактата ат-Туси, оказавший несомненное влияние на него. В обоих трактатах излагается плоская и сферическая тригонометрия, решение прямоугольных, косоугольных и сферических треугольников[2].

В Европе первым трудом, в котором тригонометрия рассматривалась как самостоятельная ветвь математики, было произведение Регномонтана «Пять книг о треугольниках всех видов», написанное в 1462—1466 гг. и содержащее все, что было известно в то время в области тригонометрии. Основное содержание этой книги заимствовано из трудов, написанных на арабском языке. Регномонтан систематизировал вопросы тригонометрии и дал прекрасное изложение их. Он составил и поместил в книге обстоятельные тригонометрические таблицы[3], в которых радиус окружности принят равным 10^7. Труд был напечатан лишь в 1533 г. и оказал большое влияние на дальнейшее развитие тригонометрии.

---

[1] См. выше, § 14, п. 22.
[2] См. статью Н. Г. Хайретдиновой в ИМИ, вып. XVII, 1966.
[3] См. выше, § 14, п. 24.

28. О графиках тригонометрических функций

Первым графиком тригонометрической функции, появившимся в печати, была *синусоида*, помещенная в одном из произведений французского математика Жиля Персона де Роберваля. Этот график был им вычерчен в конце 30-х годов XVII в. в связи с определением площади циклоиды. Вычерчивание и применение графиков функций вообще и тригонометрических в частности вошло, разумеется, в широкое употребление лишь после появления «Геометрии» Декарта и создания аналитической геометрии.

Название *линия синусов* встречается впервые в сочинении «Геометрический труд о линии синусов и циклоиде» (1659) французского автора Оноре Фабри. Не сразу и нелегко дошли ученые до полного исследования тригонометрических функций и правильного вычерчивания их графиков. Лишь в 1670 г. крупный английский математик Джон Валлис разобрался в вопросе о знаках синуса в каждом квадранте и вычертил в своей «Механике» два полных оборота синусоиды, констатировав, что их бесчисленно много. Он начертил также график секанса, однако не совсем правильно. В 1668 г. появились «геометрические этюды» замечательного английского математика Джеймса Грегори, в которых впервые встречается часть тангенсоиды, соответствующая первому квадранту. Через два года были опубликованы «Геометрические лекции» другого крупного английского математика — Исаака Барроу (учителя И. Ньютона), в которых были помещены графики косинуса, тангенса и секанса для первого квадранта. Графики последних двух функций оказались далеко не точными. Вопрос о знаках тригонометрических функций во всех четырех квадрантах, в частности тангенса и котангенса, долгое время оставался неясным. Достаточно сказать, что один из математиков того времени — петербургский академик Фридрих Майер, много содействовавший усовершенствованию тригонометрии, считал синус и тангенс тупого угла положительными, а косинус и котангенс — отрицательными. Впервые вопрос был правильно изложен в 1705 г. в мемуарах Парижской академии наук Т. де Ланьи. В 1722 г. были опубликованы в одном из произведений Р. Котеса, талантливого ученика и друга И. Ньютона, правильные графики тангенса и секанса для двух оборотов. Дальнейшее развитие тригонометрии тесно связано с именем Л. Эйлера.

29. Леонард Эйлер. Современный вид тригонометрии

Деятельность Эйлера многогранна и разностороння. Он занимался почти всем, что интересовало в то время математиков.

С. И. Вавилов

Применение символов в тригонометрии началось не в XVI в., как в алгебре, а лишь во второй половине XVII в. Переход от гро-

моздкого словесного изложения тригонометрии к алгебраическим формам записи был длительным.

В своей работе «Тригонометрия, или Учение о треугольниках» английский математик Р. Норвуд (1590—1675) употребляет следующие обозначения: s — синус, t — тангенс, sec — секанс, cs или sc — косинус, ct или tc — котангенс. Дж. Валлис пользуется в одном из своих произведений, опубликованном в 1684 г., следующими обозначениями: S — синус, Σ — косинус, T — тангенс, τ — котангенс. Соотношение, которое мы ныне записываем в виде

$$\sin\alpha = \sqrt{R^2 - \cos^2\alpha},$$

Валлис записывал так:

$$S = V : R^2 - \Sigma^2.$$

Эйлер усовершенствовал как символику, так и содержание тригонометрии. Вот некоторые его заслуги:

1) Он впервые доступно изложил вопрос о знаках тригонометрических функций в каждом квадранте, установил формулы приведения, подробно исследовав области определения этих функций и обозначив их символами: $\sin x$,$\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{cot} x$ и т. д.; он ввел употребляемые поныне обозначения a, b, c для сторон и A, B, C для соответствующих противоположных углов $\triangle ABC$, придерживаясь единой символики в тригонометрии.

2) В отличие от своих предшественников Эйлер исключил из своих формул R — *целый синус*, принимая $R = 1$ и упрощая таким образом записи и вычисления.

3) Уже во «Введении в анализ бесконечных» (1748) Эйлер впервые трактует синус, косинус и т. д. не как тригонометрические *линии*, обязательно связанные с окружностью, а как тригонометрические *фучкции*, которые он рассматривал как отношения сторон прямоугольного треугольника, как числовые величины.

4) Понимая аргумент тригонометрической функции не только как угол или дугу, а как любую числовую величину, Эйлер впервые стал систематически излагать тригонометрию аналитическим путем. До него каждая тригонометрическая теорема доказывалась отдельно на основании соответствующего каждому случаю геометрического чертежа. Эйлер же выводил теоремы, исходя из небольшого числа основных соотношений.

5) До Эйлера совсем редко рассматривались тригонометрические функции дуг, превышающих π. Лишь в его трудах разрабатывается учение о тригонометрических функциях любого аргумента.

§ 15. МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

30. Замечательные точки треугольника. Геометрия треугольника

В четвертой книге «Начал» Евклид решает задачу: «Вписать круг в данный треугольник»[1]. Из решения вытекает, что три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке — центре вписанного круга. Из решения другой задачи Евклида вытекает, что перпендикуляры, восстановленные к сторонам треугольника в их серединах, тоже пересекаются в одной точке — центре описанного круга. В «Началах» не говорится о том, что и три высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром* (греческое слово «ортос» означает прямой, правильный). Это предложение было, однако, известно Архимеду, Паппу, Проклу. Четвертой особенной точкой треугольника является точка пересечения медиан. Архимед доказал, что она является центром тяжести (барицентром) треугольника.

На вышеназванные четыре точки было обращено особое внимание, начиная с XVIII в. они были названы «замечательными» или «особенными» точками треугольника. Исследование свойств треугольника, связанных с этими и другими точками, послужило началом для создания новой ветви элементарной математики — «геометрии треугольника»[2], или «новой геометрии треугольника», одним из родоначальников которой был Леонард Эйлер.

В 1765 г. Эйлер доказал, что в любом треугольнике ортоцентр, барицентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой, названной позже «прямой Эйлера». В 20-х годах XIX в. французские математики Ж. Понселе, Ш. Брианшон и другие установили независимо друг от друга следующую теорему (рис. 32): основания медиан, основания высот и середин отрезков высот, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной и той же окружности.

Эта окружность называется «окружностью девяти точек», или «окружностью Фейербаха», или «окружностью Эйлера». К. Фейербах установил, что центр этой окружности лежит на «прямой Эйлера».

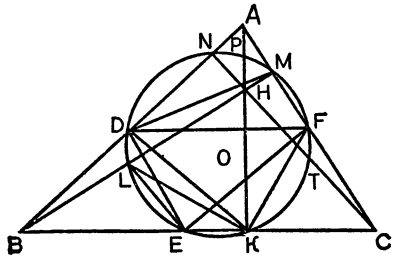


Рис. 32

Большой вклад в развитие геометрии треугольника внесли математики XIX—XX вв. Лемуан, Брокар, Тебо и др.

---

[1] См.: Евклид. Начала. М.— Л., 1948, кн. I — VI, с. 125—126, 361—367.

[2] Развитие этой геометрии стало особенно заметным начиная с 70-х годов прошлого века.

31. О теореме Пифагора. Геометрия в Древней Индии

Прокл в своем комментарии к «Началам» Евклида пишет относительно предложения о том, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, следующее: «Если слушать тех, кто любит повторять древние легенды, то придется сказать, что эта теорема восходит к Пифагору. Рассказывают, что в честь этого открытия он принес в жертву быка». О том же рассказывает и другой греческий историк древности — Плутарх (I в.). На основе этих и других преданий долгое время считали, что до Пифагора эта теорема не была известна и назвали ее поэтому «теоремой Пифагора». Это название сохранилось поныне. Однако в настоящее время установлено, что эта важнейшая теорема встречается в вавилонских текстах, написанных за 1200 лет до Пифагора.

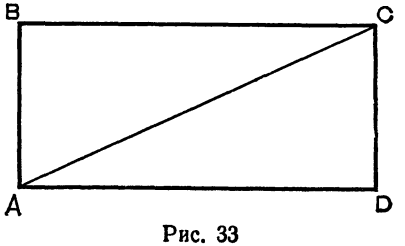


Рис. 33

О том, что треугольник со сторонами 3, 4 и 5 есть прямоугольный, знали за 2000 лет до н. э. египтяне, которые, вероятно, пользовались этим отношением для построения прямых углов при сооружении зданий. В Китае предложение о квадрате гипотенузы было известно по крайней мере за 500 лет до Пифагора. Эта теорема была известна и в Древней Индии; об этом свидетельствуют следующие предложения, содержащиеся в «Сутрах».

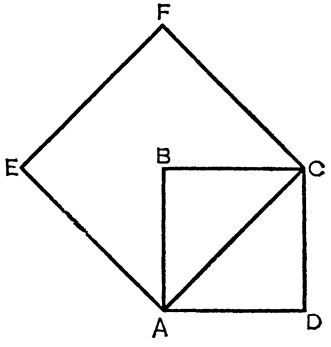


Рис. 34

1) *Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов его большей и меньшей сторон* (рис. 33).

2) *Квадрат на диагонали квадрата в два раза больше самого квадрата* (рис. 34).

Одно из старейших наглядных доказательств теоремы Пифагора, содержащееся и в одном из произведений Бхаскары, состоит в следующем (рис. 35).

Пусть $ABDE$ — квадрат, сторона которого равна гипотенузе прямоугольного треугольника ABC ($AB = c$, $BC = a$, $AC = b$);

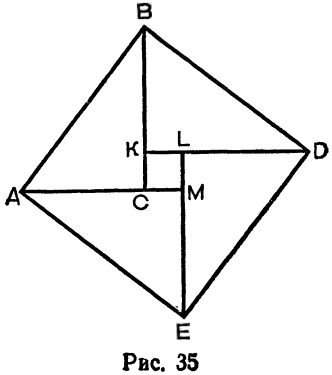


Рис. 35

далее, пусть DK перпендикулярна к BC, она равна a; $EI \perp DK$, $AM \perp EL$; тогда равны треугольники ABC, BDK, DEL и AME. Далее, $KL = LM = CM = CK = a - b$. Итак,

$$c^2 = \frac{4ab}{2} + (a - b)^2,$$

$$c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2,$$

откуда

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

В настоящее время известно более 150 доказательств теоремы Пифагора (см. гл.6, § 18).

32. Герон Александрийский. Формула площади треугольника

Одним из поздних греческих математиков-энциклопедистов, труды которого имели главным образом прикладной характер, был Герон Александрийский (годы его жизни точно не известны — одни историки предполагают, что он жил в III в. до н. э., а другие — в I в. н. э.). О жизни Герона до нас дошли лишь отрывочные сведения. Известно, что он был выдающимся ученым-механиком. Его даже называют «Герон-Механик». Он много внимания уделял вопросам геодезии и практическому применению геометрии.

В сочинении «Диоптры» Герон изложил правила съемки земельных участков на основе использования прямоугольных координат. В этом труде Герон описал некоторые измерительные приборы и инструменты, в том числе и «диоптры» — приборы, которые служили для построения и измерения углов на местности.

Одна из книг Герона была названа им «Геометрика» и является своего рода сборником формул и соответствующих задач. Она содержит примеры на вычисление площадей квадратов, прямоугольников и треугольников. О нахождении площади треугольника по его сторонам Герон пишет: «Пусть, например, одна сторона треугольника имеет в длину 13 мерных шнуров, вторая 14 и третья 15. Чтобы найти площадь, поступай вот как. Сложи 13, 14 и 15; получится 42. Половина этого будет 21. Вычти из этого три стороны одну за другой; сперва вычти 13 — останется 8, затем 14 — останется 7 и, наконец, 15 — останется 6. А теперь перемножь их: 21 раз по 8 даст 168, возьми это 7 раз — получится 1176, а это еще 6 раз — получится 7056. Отсюда квадратный корень будет 84. Вот сколько мерных шнуров будет в площади треугольника».

В своем наиболее важном геометрическом произведении «Метрика» Герон излагает доказательство примененной им выше формулы:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны, p — полупериметр треугольника.

Эта формула носит название «формулы Герона». На самом деле она была установлена еще в III в. до н. э. величайшим математиком древности — Архимедом.

Практические правила Герона для вычисления площадей применялись греческими, римскими и средневековыми землемерами и техниками.

Интересна задача Герона «Найти все треугольники с целочисленными сторонами, площади которых также выражаются целыми числами», т. е. найти формулу, которая позволяла бы указать стороны и площадь треугольника в целых числах для определенного случая.

Среди прямоугольных треугольников — это все треугольники Пифагора, например со сторонами 3, 4, 5; 5, 12, 13; 7, 24, 25 и т. д. Сформулированная выше задача значительно шире — она является обобщением задачи Пифагора. Отличается же она от последней заменой в условии наличия прямого угла требованием выражения площади треугольника целым числом. Частные случаи решения известны, например: $a = 7$, $b = 15$, $c = 20$ или $a = 9$, $b = 10$, $c = 17$; $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ и др. Попробуйте проверить по известной формуле Герона, удовлетворяют ли треугольники с указанными сторонами требованиям, высказанным в условии задачи.

Для прямоугольного треугольника найдена формула, по которой можно найти решение для треугольника с одной заданной стороной. Для обобщенного же случая формулы, описывающей, как выразить стороны треугольника, нет.

33. «Золотое сечение»

Если потребуется разделить отрезок (a) на две части так, чтобы отношение данного отрезка (a) к его большей части (x) было бы равно отношению его большей части (x) к меньшей ($a - x$), мы должны будем найти так называемое «золотое сечение» или «золотое деление». Математическое выражение такого действия можно записать пропорцией:

$$a : x = x : (a - x). \qquad (1)$$

Из этой пропорции имеем: $x^2 + ax - a^2 = 0$.

Решение этого квадратного уравнения даст положительный корень:

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}.$$

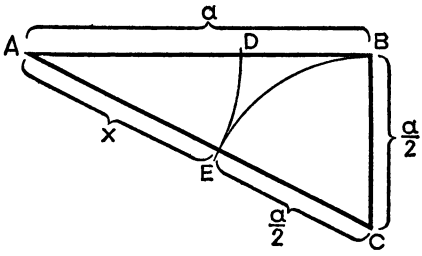


Рис. 36

Опираясь на теорему Пифагора, подкоренное выражение можно рассматривать как гипотенузу треугольника с катетами a и $\frac{a}{2}$, тогда x можно выразить разностью между этой гипотенузой и половиной отрезка $\left(\frac{a}{2}\right)$. Чтобы разделить отрезок в заданном отношении, построим прямоугольный треугольник с катетами a и $\frac{a}{2}$ (рис. 36). Затем из гипотенузы этого треугольника вычтем $\frac{a}{2}$ и оставшийся отрезок, равный $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$, отложим на первоначальном отрезке a. Мы получили, что геометрически пропорцию можно выразить так:

$$AB : AD = AD : DB, \qquad (1)$$

где $AD = x$. Если $|AB| = a$ принять за единичный отрезок, то получим следующие числовые выражения:

$$|AD| = x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}618\ldots$$

и $|DB| = 1 - x = 0{,}382\ldots$. А пропорция (1) примет вид:

$$1 : 0{,}618\ldots = 0{,}618\ldots : 0{,}382\ldots .$$

Можно записать следующее равенство:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

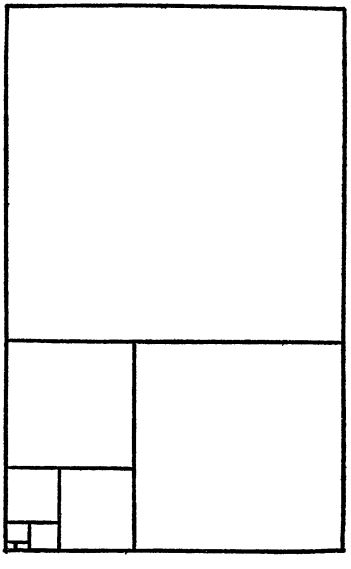


Рис. 37

Указанную непрерывную дробь можно иллюстрировать площадью «золотого прямоугольника» (рис. 37), построив его на сторонах, равных 1 и 0,618 ... или 1 и $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Отсечем у этого прямоугольника квадрат, сторона которого равна меньшей стороне прямоугольника. Оставшийся меньший

прямоугольник также будет «золотым» (отношение его сторон то же). С этим малым прямоугольником поступим так же и т. д. Получим ряд уменьшающихся прямоугольников, обладающих теми же свойствами, что и первоначальный.

Теория отношений и пропорций была создана древними греками. Еще Фалес Милетский (VI в. до н. э.), находясь в Египте, вычислял высоты пирамид, измеряя их тень и сравнивая с тенью стержня, взятого за единицу длины, т. е. пользовался пропорцией. В IV в. трудами греков Теэтета и Евдокса было создана теория пропорций для соизмеримых и для несоизмеримых величин. Евдокс (ок. 408—355 гг. до н. э.), врач, астроном, механик и математик, сумел, применяя пропорции, преодолеть трудности, появившиеся после открытия пифагорейцами несоизмеримых чисел. Он вышел из затруднения, определив отношение несоизмеримых величин при помощи неравенств с целыми числами. Он рассматривал и пропорциональность «золотого сечения».

Евклид, опираясь на труды предшественников и главным образом на работы Евдокса, в «Началах» изложил теорию отношений и пропорций, а также решение задачи о «золотом сечении». Он применил «золотое сечение» при построении правильных пяти- и десятиугольников и при построении правильных двенадцати- и двадцатигранников. После Евклида исследованием «золотого сечения» занимались Папп (III в. н. э.) и др.

В XV—XVI вв. снова проявился большой интерес к «золотому сечению» в связи с тем, что оно довольно часто использовалось в искусстве и архитектуре. Термин «золотое сечение» ввел Леонардо да Винчи. Л. Пачоли (1445—ок. 1514) посвятил этой пропорциональности книгу «Божественная пропорция». «Золотое деление» называют также гармоническим или делением в крайнем и среднем отношении. Оно наряду с другими пропорциями применяется в практике довольно часто. Многие современные изделия с прямоугольными гранями имеют форму граней, близкую «золотым прямоугольникам» (книги, тетради и пр.). Однако ничего божественного в пропорциональности «золотого сечения», как и в других пропорциях, широко используемых в искусстве и архитектуре, конечно нет.

34. Теорема косинусов и теорема синусов

Начиная с древних времен и примерно до XVII в. в тригонометрии рассматривали почти исключительно «решение треугольников», т. е. вычисление одних элементов треугольника (или многоугольника, разбитого на треугольники) по другим его элементам. Такие вычисления были вызваны запросами астрономии, географии, мореплавания, геодезии и архитектуры. Лишь в XVII в. содержание тригонометрии значительно расширяется.

Для решения треугольника, т. е. для нахождения трех его элементов, когда известны другие три его элемента (среди которых

по крайней мере одна сторона), необходимо иметь три независимых соотношения между шестью его элементами. В евклидовой геометрии одно из них выражается равенством

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ, \tag{1}$$

где $\widehat{A} > 0$, $\widehat{B} > 0$, $\widehat{C} > 0$.

В случае прямоугольного треугольника, помимо теоремы Пифагора, можно пользоваться, например, соотношением

$$b = c \cdot \sin B. \tag{2}$$

В случае косоугольного треугольника, помимо (1), можно использовать теорему косинусов или теорему синусов.

Теорема косинусов была по существу доказана, конечно, геометрически, еще в «Началах» Евклида, а именно в 12-м и 13-м предложениях II книги, в которой обобщается теорема Пифагора и выводятся формулы, выражающие квадрат стороны, лежащей против острого или тупого угла треугольника. Это положение, доказанное Евклидом, эквивалентно теореме косинусов:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C. \end{aligned} \tag{3}$$

Александрийские математики Герон (I в.) и Папп (III в.), ученые Индии (Брахмагупта, Бхаскара) и стран Ближнего и Среднего Востока (ал-Беруни), как и некоторые европейские математики XII—XV вв. (Л. Фибоначчи, Н. Неморарий), пользовались формулами близкими к (3), однако впервые теорема косинусов была явно сформулирована (словесно) в XVI в. французским математиком Франсуа Виетом, автором известных «Математических таблиц», появившихся в 1579 г. В современных обозначениях можно так записать соответствующую формулу Виета:

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{1}{\sin(90^\circ - C)}.$$

Современный вид теорема косинусов (3) принимает в 1801 г. у французского математика Лазара Карно (1753—1823). Ж. Л. Лагранж вывел в 1799 г. теорему синусов из теоремы косинусов. Другой французский математик, О. Коши, выводит теорему косинусов из теоремы синусов в своем «Курсе анализа» (1821).

Ученые Индии, как и ученые стран ислама IX—X вв., сводили решение любых треугольников к решению прямоугольных треугольников и поэтому не нуждались в теореме синусов и ее не знали. Эта теорема была доказана лишь в XI в. уроженцем Хорезма, выдающимся астрономом ал-Беруни:

Вместе с соотношением (1) теорема синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \qquad (4)$$

представляющая два независимых уравнения, позволяет решать любой треугольник. Теоремой синусов пользовались начиная с XVI в. и европейские математики.

§ 16. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

35. О вписанных углах. Гиппократ Хиосский

Изложенное в современных учебниках доказательство того, что вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, дано в «Началах» Евклида. На это предложение ссылается, однако, еще *Гиппократ Хиосский* (V в. до н. э.) в своем труде о «луночках». Труды Гиппократа свидетельствуют о том, что уже во второй половине V в. до н. э. было известно большое число теорем, изложенных в «Началах» Евклида, и геометрия достигла высокого развития.

Тот факт, что опирающийся на диаметр вписанный угол—прямой, был известен вавилонянам еще 4000 лет назад. Первое его доказательство приписывается Памфилией, римской писательницей времен Нерона, Фалесу Милетскому. Некоторые комментаторы Евклида полагают[1], что доказательство Фалеса, основанное на предложении, что сумма углов треугольника равна $2d$, было следующее (рис. 38): обозначив углы при диаметре через 1, 2, а части угла ABC, на которые он рассекается радиусом OC, через 3, 4, получаем, с одной стороны: $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$; с другой стороны: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2d$, откуда $2(\angle 3 + \angle 4) = 2d$, $\angle 3 + \angle 4 = d$, т. е. $\angle ACB = d$.

36. О правильных многоугольниках

В египетских и вавилонских старинных памятниках встречаются правильные четырехугольники, шестиугольники и восьмиугольники в виде изображений на стенах и украшений, высеченных из камня.

Древнегреческие ученые стали проявлять большой интерес к правильным фигурам еще со времен Пифагора. Деление окружности на некоторое число равных частей для построения правильных многоугольников имело важное значение для пифагорейцев,

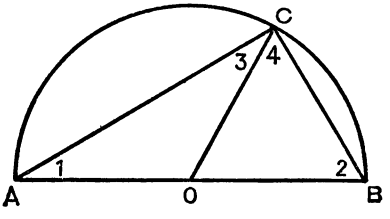


Рис. 38

[1] См.: Евклид. Начала. М. — Л., 1948, кн. I — XIV, с. 250.

которые утверждали, что числа лежат в основе всех явлений мира. Учение о правильных многоугольниках, начатое в школе Пифагора, продолженное и развитое в V—IV вв. до н. э., было систематизировано Евклидом и изложено в IV книге «Начал». Кроме построения правильного треугольника, четырехугольника, пятиугольника и шестиугольника, Евклид решает и задачу построения правильного пятнадцатиугольника при помощи только циркуля и линейки. Эта фигура привлекала внимание древних, так как было замечено, что дуга угла наклонения эклиптики к экватору представляет собой $\frac{1}{15}$ всей окружности, т. е. стягивается стороной правильного пятнадцатиугольника.

Зная, как построить правильный n-угольник, легко можно построить правильный $2n$-угольник. Долгое время математики тщетно искали способы построения правильного семиугольника, девятиугольника, одиннадцатиугольника и т. д., не зная даже, возможно ли вообще построение таких многоугольников с помощью только циркуля и линейки. Эта проблема была решена лишь в конце XVIII в. 19-летним К. Ф. Гауссом, великим немецким математиком, доказавшим, что с помощью циркуля и линейки можно разделить окружность на такое простое число N равных частей, которое выражается формулой

$$N = 2^{2^n} + 1,$$

где n — натуральное число или нуль.

Вот несколько примеров:

1) $n = 0$, $N = 3$; 2) $n = 1$, $N = 5$; 3) $n = 2$, $N = 17$; 4) $n = 3$, $N = 257$; 5) $n = 4$, $N = 65\,537$ и т. д.

После открытия Гаусса стало ясно, что, помимо ранее известных правильных многоугольников с 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 16; 20; 24; 30; 32; 40; ... сторонами, можно построить с помощью циркуля и линейки правильные многоугольники с 17; 34; 68; 126; 252; 257; ... сторонами. С другой стороны, невозможно циркулем и линейкой построить правильные многоугольники со следующим числом сторон: 7; 9; 11; 13; 14; 18; 19; 21; 22; 23; 25; 27; 28; ... .

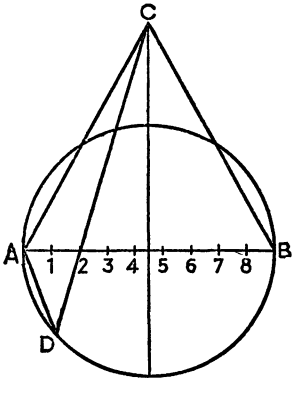


Рис. 39

Еще в древности практиковалось для разных нужд приближенное построение любого правильного многоугольника. Так, например, Герон Александрийский находит приближенное значение стороны правильного девятиугольника.

Задача построения правильного n-угольника сводится к делению окружности на n равных частей. Один прак-

тический прием такого деления предложил французский математик Н. Бион. Прием этот состоит в следующем: *пусть требуется разделить окружность, например, на 9 равных частей* (рис. 39).

На диаметре окружности строится равносторонний треугольник ABC. Диаметр AB делим на 9 равных частей. Соединяя вторую точку деления с вершиной треугольника C, продолжим прямую до пересечения с окружностью в точке D. Дуга AD является девятой частью окружности, хорда AD — стороной правильного девятиугольника[1].

37. О длине окружности и площади круга. Архимед

Задача вычисления длины окружности и площади круга возникла еще в глубокой древности.

В папирусе Ахмеса указывается, что за площадь круга S следует принимать площадь квадрата, сторона которого равна 8/9 диаметра[2], т. е.

$$S = \left(\frac{8}{9} \cdot 2R\right)^2 = \frac{256}{81} R^2.$$

Это значит, что для отношения длины окружности к диаметру (π) берется значение $\frac{256}{81} \approx 3{,}1605...$

Однако в других древнеегипетских и вавилонских текстах встречается значение $\pi = 3$, которое, по-видимому, вполне удовлетворяло потребности землемеров того времени[3]. Позже римляне принимали $\pi = 3{,}12$. Эти и другие приближенные значения были получены эмпирическими способами, например путем прямого измерения длины окружности с помощью веревки и т. п.

Вопрос о вычислении отношения длины окружности к своему диаметру, т. е. числа π, занимал лучшие умы человечества на протяжении тысячелетий. Первое вычисление π на основе строгих теоретических рассуждений было предпринято величайшим математиком древности Архимедом (см. гл. 6, § 16). В своем произведении «Об измерении круга» он доказал, что

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Выведенное Архимедом для π приближенное значение $\frac{22}{7} \approx$

---

[1] В XIX в. теория многоугольников была развита немецким математиком А. Ф. Мебиусом и др.

[2] См.: Раик А. Е. К истории возникновения замечательного египетского приближения к числу π. — Ученые записки Мордовского ун-та, 1960, вып. 8.

[3] Из одной клинописной таблички, найденной в 1939 г., следует, что вавилоняне пользовались также приближенным $\pi = 3{,}125$.

$\approx 3{,}14$ оказалось вполне удовлетворительным для практики. На это значение ссылаются Герон Александрийский, Папп, Прокл и другие ученые. Оно широко применяется и в настоящее время.

В произведениях Герона «Метрика» и «Геометрика» содержится много примеров на вычисление диаметра и длины окружности, площади круга, а также сегмента и сектора круга. Слово «сегмент» латинского происхождения (segmentum — отрезок) и является буквальным переводом соответствующего греческого термина, употребляемого Евклидом. То же можно сказать о термине «сектор» (по-латыни sector — резец).

38. О числе π[1]

Известно, что отношение длины окружности к диаметру не может быть точно выражено ни целым числом, ни обыкновенной дробью, ни конечной десятичной дробью.

Приближенные с недостатком и избытком значения для π Архимед получил, рассматривая вписанные в круг и описанные около него многоугольники с достаточно большим числом сторон. Он последовательно определял стороны вписанных и описанных шестиугольника, двенадцатиугольника, двадцатичетырехугольника, сорокавосьмиугольника и девяностошестиугольника, выраженные через диаметр. Созданный Архимедом метод вычисления длины окружности посредством периметров вписанных и описанных многоугольников применялся многими видными математиками на протяжении почти 2000 лет.

В некоторых странах Азии встречается значение $\pi = \sqrt{10}$, т. е. 3,162... . Астроном Ван Фань (229—267) утверждал, что $\pi = \frac{142}{45}$, т. е. 3,155..., а Цзу Чун-чжи (428—499) говорил о «неточном» значении $\frac{22}{7}$ и о «точном» $\frac{355}{113}$, показав, что π содержится между 3,1415926 и 3,1415927. Последнее значение записывалось в VII в. в виде именованного числа: 3 чжана 1 чи 4 цуня 1 фень 5 ли 9 хао 2 мяо 7 хо.

В индийских «сутрах» (VII—V вв. до н. э.) имеются правила, из которых вытекает, что $\pi = 3{,}008$. Ариабхатта и Бхаскара брали значение $\frac{62832}{20000}$, т. е. 3,1416..., Брахмагупта, Магавира и Сридхара брали $\pi = \sqrt{10}$.

В своей книге «Об измерении окружности» (1424) ал-Каши нашел для π значение, далеко превосходящее по точности все ранее известные. Рассмотрев вписанный и описанный многоугольники с 800 335 168 сторонами, он получает окончательный результат, выраженный в шестидесятеричных и в десятичных дробях в виде

[1] Предполагается, что изложенные здесь сведения учитель расскажет не на одном уроке, а возможно, и не только на уроках.

$2\pi \approx 6{,}2831853071795865$, т. е. $\pi \approx 3{,}1415926535897932$ — тут 16 верных знаков.

Однако труды ал-Каши в Европе долгое время не были известны. Голландский профессор Адриан Меций вновь нашел в XVI в. значение $\frac{355}{113}$ для π независимо от Цзу Чун-чжи. В 1597 г. А. Ван Ромен из Лувена (Бельгия), применяя метод Архимеда с помощью 2^{30}-угольников, получил 17 верных десятичных знаков. Большое терпение и выдержку обнаружил голландский вычислитель Лудольф ван-Цейлен (1540—1610), который, применяя метод Архимеда, дошел до многоугольников с $60 \cdot 20^{29}$ степени сторонами, получив 35 верных десятичных знаков для π. В его честь число π было названо современниками «Лудольфово число». Согласно завещанию самого Лудольфа, на его надгробном камне было высечено найденное им значение π.

Начиная с конца XVII в. для вычисления π применяются более эффективные методы высшей математики. Леонард Эйлер вычислил π с точностью до 153 десятичных знаков. После опубликования его работы (1736) стало общепринятым обозначение π (первая буква в греческом слове «периферия» — круг), которое встречается впервые в 1706 г. у английского математика У. Джонса. В 1873 г. англичанин В. Шенкс определил π с точностью до 707 десятичных знаков, усердно проработав для этой цели целых 15 лет. Однако, как выяснилось впоследствии, 527-й знак Шенкса оказался неверным. Ошибка была обнаружена Фергюссоном и Ренчем, которые в 1948 г. получили значение π с 808 знаками. С помощью электронных машин в 1949 г. получено значение π с 2035 знаками, а позднее — с 3089 знаками всего лишь за 13 с. К 1963 г. было найдено уже 100 265 десятичных знаков числа «пи». Вычисление такого большого числа знаков для π не имеет практического значения, а показывает лишь огромное преимущество и совершенство современных средств и методов вычисления по сравнению со старыми.

39. Об одной ошибке древних египтян

З а д а ч а **32**. В Акмимском папирусе площадь круга, окружность которого есть среднее арифметическое двух данных окружностей (с радиусами $r = 5$, $R = 10$), принимается за среднее арифметическое их площадей. Показать, что это неправильно и выразить ошибку в процентах.

§ 17. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

40. О призме и параллелепипеде

В памятниках вавилонской и древнеегипетской архитектуры встречаются такие геометрические фигуры, как куб, параллелепипед, призма. Важнейшей задачей египетской и вавилонской

геометрии было определение объема различных пространственных фигур. Эта задача отвечала необходимости строить дома, дворцы, храмы и другие сооружения.

Часть геометрии, в которой изучаются свойства куба, призмы, параллелепипеда и других геометрических тел и пространственных фигур, издавна называется *стереометрией*. Слово это греческого происхождения («стереос» — пространственный, «метрео» — измеряю) и встречается еще у знаменитого древнегреческого философа Аристотеля (IV в. до н. э.).

Стереометрия возникла позже, чем планиметрия[1]. XI—XIII книги «Начал» посвящены стереометрии.

В XI книге Евклид дает следующее определение призмы: «Призма есть телесная (т. е. пространственная) фигура, заключенная между плоскостями, из которых две противоположные равны и параллельны, остальные же — параллелограммы». Тут, как и во многих других местах, Евклид употребляет термин «плоскость» не в смысле безгранично продолженной плоскости, а в смысле ограниченной ее части, грани, подобно тому как «прямая» означает у него и отрезок прямой.

Термин «призма» греческого происхождения и буквально означает «отпиленное» (тело).

Термин «параллелепипедальное тело» встречается впервые у Евклида и означает дословно «параллеле-плоскостное тело». Греческое слово «кубос» употребляется Евклидом в том же смысле, что и наше слово «куб».

41. Измерение объемов

Объемы зерновых амбаров и других сооружений в виде кубов, призм и цилиндров египтяне и вавилоняне, китайцы и индийцы вычисляли путем умножения площади основания на высоту. Однако древнему Востоку были известны в основном только отдельные правила, найденные опытным путем, которыми пользовались для нахождения объемов и площадей фигур. В более позднее время, когда геометрия сформировалась как наука, был найден общий подход к вычислению объемов многогранников.

Среди замечательных греческих ученых V—IV вв. до н. э., которые разрабатывали теорию объемов, были Демокрит из Абдеры и Евдокс Книдский.

Евклид не применяет термина «объем». Для него термин «куб», например, означает и объем куба. В XI книге «Начал» изложены среди других и т е о р е м ы следующего содержания.

1. *Параллелепипеды с одинаковыми высотами и равновеликими основаниями равновелики.*

---

[1] Термин же «планиметрия», наоборот, был образован в средние века по образцу античного термина «стереометрия».

2. *Отношение объемов двух параллелепипедов с равными высотами равно отношению площадей их оснований.*

3. *В равновеликих параллелепипедах площади оснований обратно пропорциональны высотам.*

Теоремы Евклида относятся только к *сравнению* объемов, так как непосредственное вычисление объемов тел Евклид, вероятно, считал делом практических руководств по геометрии. В произведениях прикладного характера Герона Александрийского имеются правила для вычислений объема куба, призмы, параллелепипеда и других пространственных фигур.

42. О пирамиде и ее объеме

Термин «пирамида» заимствован из греческого «пирамис» или «пирамидос». Греки в свою очередь позаимствовали это слово, как полагают, из египетского языка. В папирусе Ахмеса встречается слово «пирамус» в смысле ребра правильной пирамиды. Другие считают, что термин берет свое начало от формы хлебцев в Древней Греции («пирос» — рожь). В связи с тем что форма пламени иногда напоминает образ пирамиды, некоторые средневековые ученые считали, что термин происходит от греческого слова «пир» — огонь. Вот почему в некоторых учебниках геометрии XVI в. пирамида названа «огнеформное тело».

В Древнем Египте гробницы фараонов имели форму пирамид. В III тысячелетии до н. э. египтяне сооружали ступенчатые пирамиды, сложенные из каменных блоков; позже египетские пирамиды приобрели геометрически правильную форму, например пирамида Хеопса, высота которой достигает почти 147 м, и др. Внутри пирамид находились погребальные склепы и коридоры.

Согласно Архимеду, еще в V в. до н. э. Демокрит из Абдеры установил, что объем пирамиды равен одной трети объема призмы с тем же основанием и той же высотой. Полное доказательство этой теоремы дал Евдокс Книдский в IV в. до н. э.

В «Началах» Евклида доказывается, что в равновеликих пирамидах площади оснований обратно пропорциональны соответствующим высотам. Первое непосредственное вычисление объема пирамиды, дошедшее до нас, встречается у Герона Александрийского.

Интересно отметить, что в древних документах встречаются правила для определения объема усеченной пирамиды, но нет правил вычисления объема полной пирамиды. В «Московском папирусе» имеется задача, озаглавленная «Действия с усеченной пирамидой», в которой излагается верное вычисление объема одной усеченной пирамиды. В вавилонских клинописных табличках тоже не встречается вычисление объема пирамиды, но зато в них есть много примеров вычисления объема усеченной пирамиды.

Формула, употребляемая ныне для вычисления объема усеченной пирамиды,

$$V = \frac{1}{3} h \left(b + b' + \sqrt{bb'}\right),$$

в которой h, b, b' обозначает соответственно высоту, площадь верхнего и площадь нижнего основания, встречается в словесной форме впервые у Леонардо Фибоначчи в его книге «Практика геометрии», написанной в 1220 г.

43. О конусе

Латинское слово conus позаимствовано из греческого языка («конос» — затычка, втулка, сосновая шишка).

В XI книге «Начал» дается следующее определение: *если вращающийся около одного из своих катетов прямоугольный треугольник снова вернется в то же самое положение, из которого он начал двигаться, то описанная фигура будет конусом.*

Неподвижный катет, вокруг которого поворачивается треугольник, называется *осью* конуса, а круг, описываемый вращающимся катетом, называется *основанием* конуса. Евклид рассматривает только *прямые* конусы, т. е. такие, у которых ось перпендикулярна к основанию, лишь Аполлоний различает прямые и *косые* конусы, у которых ось образует с основанием угол, отличный от прямого.

В XII книге «Начал» Евклида содержатся следующие теоремы.

1. *Объем конуса равен одной трети объема цилиндра с равным основанием и равной высотой; доказательство этой теоремы принадлежит Евдоксу Книдскому.*

2. *Отношение объемов двух конусов с равными основаниями равно отношению соответствующих высот.*

3. *Если два конуса равновелики, то площади их оснований обратно пропорциональны соответствующим высотам и наоборот.*

Непосредственное вычисление объема конуса дает Герон Александрийский. Боковая поверхность конуса, как и цилиндра, была найдена Архимедом. О ней идет речь в книге «О шаре и цилиндре[1]».

44. О шаре

Шаром принято называть тело, ограниченное *сферой* (поверхностью, определяемой как геометрическое место точек пространства, удаленных на данное расстояние от одной точки). Однако оба слова «шар» и «сфера» происходят от одного и того же греческого слова «сфайра» — мяч. При этом слово «шар» образовалось от перехода согласных *сф* в *ш*.

[1] См.: Архимед. Соч. М., 1962, с. 95—168; 451—508.

В древности сфера была в большом почете. Астрономические наблюдения над небесным сводом неизменно вызывали образ сферы. Пифагорейцы учили о существовании десяти сфер Вселенной, по которым якобы двигаются небесные тела. Они утверждали, что расстояния этих тел друг от друга пропорциональны интервалам музыкальной гаммы. В этом усматривали элементы мировой гармонии. В подобных полумистических рассуждениях заключалась пифагорова «музыка сфер». Аристотель считал, что шарообразная форма, как наиболее совершенная, свойственна Луне, Солнцу, Земле и всем мировым телам. Развивая взгляды Евдокса, он полагал, что Земля окружена рядом концентрических сфер. Сфера всегда широко применялась в различных областях науки и техники. В сферической астрономии решаются задачи, связанные с изучением видимого расположения и движения светил на небесной сфере, применяются формулы *сферической тригонометрии*, изучающей зависимость между сторонами и углами сферических треугольников.

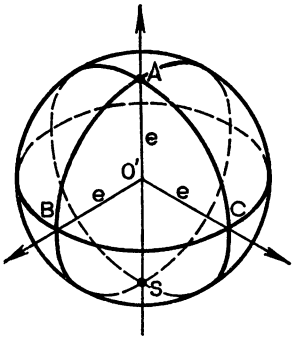


Рис 40

Область математики, в которой изучаются фигуры на поверхности сферы, называется *сферической геометрией*. Сечение сферы какой-либо плоскостью дает окружность. Если плоскость проходит через центр сферы, то в сечении получается *большая окружность*, т. е. такая, центр и радиус которой совпадают с центром и радиусом сферы. Большие окружности на сфере выполняют роль, аналогичную роли прямых линий на плоскости: через две точки сферы, не являющиеся концами одного и того же диаметра, проходит одна и только одна большая окружность. Сферические треугольники составляются из дуг больших окружностей (рис. 40, 41). Некоторые свойства сферических треугольников совпадают со свойствами обычных, плоских треугольников, например каждая сторона меньше суммы и больше разности двух других сторон; имеют место известные три признака равенства треугольников. Однако во многом сферические треугольники отличаются от плоских. На сфере не имеет места аксиома параллельности Евклида, так как любые две большие окружности («прямые») пересекаются. Поэтому на сфере не существует подобных треугольников, сумма углов сферического треугольника всегда больше двух прямых углов.

В XI книге «Начал» Евклид определяет шар как фигуру, описанную вращающимся около неподвижного диаметра полукругом. Он доказывает только теорему о том, что объемы двух шаров относятся как кубы их радиусов, но не выводит формулы и не дает ни-

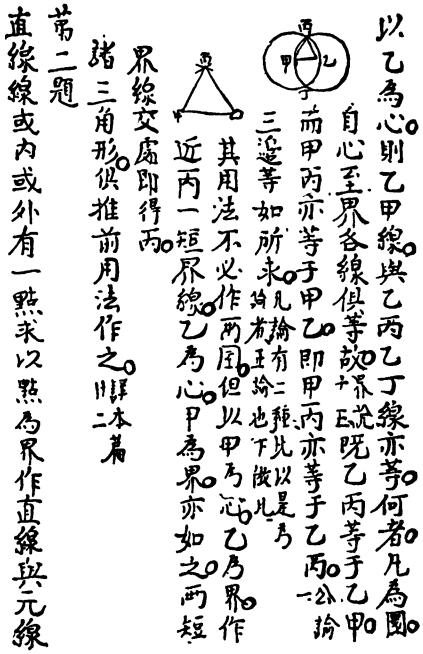


Рис. 41. Из китайского издания «Начал» Евклида (XVII в.)

какого правила, которого, вероятно, и не знал для вычисления площади поверхности сферы и объема шара.

Вывод формулы объема шара и площади поверхности сферы — одно из величайших открытий Архимеда.

В его произведении «О шаре и цилиндре» имеются следующие теоремы.

1. *Площадь поверхности сферы равна учетверенной площади ее большого круга* (т. е. $S = 4\pi R^2$).

2. *Объем шара равен учетверенному объему конуса, основанием которого служит большой круг, а высотой — радиус шара* (т. е. $V = {}^4/_3\pi R^3$).

3. *Объем цилиндра в полтора раза больше объема вписанного в него шара.*

4. *Площадь поверхности цилиндра, включая основания, равна* ${}^3/_2$ *площади поверхности вписанной сферы.*

Цилиндр с вписанным шаром — символ одного из прекраснейших открытий Архимеда — был изображен на его надгробном камне в Сиракузах.

45. Краткий обзор развития геометрии

Первые геометрические понятия возникли в доисторические времена[1]. Разные формы материальных тел наблюдал человек в природе: формы растений и животных, гор и извилин рек, круга и серпа Луны и т. п. Однако человек не только пассивно наблюдал природу, но практически осваивал и использовал ее богатства. В процессе практической деятельности он накапливал геометрические сведения. Материальные потребности побуждали людей изготовлять орудия труда, обтесывать камни и строить жилища, лепить глиняную посуду и натягивать тетиву на лук. Конечно, десятки и сотни тысяч раз натягивали люди свои луки, изготовляли разные предметы с прямыми ребрами и т. п., пока постепенно

[1] Рекомендуется использовать нижеизложенный материал и некоторые сведения из предыдущих бесед при повторении учебного материала и на итоговом уроке по геометрии в VIII классе.

дошли до отвлеченного понятия *прямой линии*. Примерно то же можно сказать о других основных геометрических понятиях. Практическая деятельность человека служила основой длительного процесса выработки отвлеченных понятий, открытия простейших геометрических зависимостей и соотношений.

Начало геометрии было положено в древности при решении чисто практических задач. Со временем, когда накопилось большое количество геометрических фактов, у людей появилась потребность обобщения, уяснения зависимости одних элементов от других, установления логических связей и доказательств. Постепенно создавалась геометрическая наука. Примерно в VI—V вв. до н. э. в Древней Греции в геометрии начался новый этап развития, что объясняется высоким уровнем, которого достигла общественно-политическая и культурная жизнь в греческих государствах. Произведения, содержащие систематическое изложение геометрии, появились в Греции еще в V в. до н. э., но они были вытеснены «Началами» Евклида.

Геометрические знания примерно в объеме современного курса средней школы были изложены еще 2200 лет назад в «Началах» Евклида. Конечно, изложенная в «Началах» наука геометрия не могла быть создана одним ученым. Известно, что Евклид в своей работе опирался на труды десятков предшественников, среди которых были Фалес и Пифагор, Демокрит и Гиппократ, Архит, Теэтет, Евдокс и др. Ценой больших усилий, исходя из отдельных геометрических сведений, накопленных тысячелетиями в практической деятельности людей, эти великие ученые сумели на протяжении 3—4 столетий привести геометрическую науку к высокой ступени совершенства. Историческая заслуга Евклида состоит в том, что он, создавая свои «Начала», объединил результаты своих предшественников, упорядочил и привел в одну систему основные геометрические знания того времени. На протяжении двух тысячелетий геометрия изучалась в том объеме, порядке и стиле, как она была изложена в «Началах» Евклида (рис. 41). Многие учебники элементарной геометрии во всем мире представляли (а многие и поныне представляют) собой лишь переработку книги Евклида. «Начала» на протяжении веков были настольной книгой величайших ученых.

Г. Монж

В XVII в. Декарт благодаря методу координат сделал возможным изучение свойств геометрических фигур с помощью алгебры. С этого времени начала развиваться *анали-*

тическая геометрия. В XVII—XVIII вв. зарождается и разрабатывается *дифференциальная геометрия*, изучающая свойства фигур с помощью методов математического анализа. В XVIII—XIX вв. развитие военного дела и архитектуры привело к разработке методов точного изображения пространственных фигур на плоском чертеже, в связи с чем появляются *начертательная геометрия*, научные основы которой заложил французский математик Г. Монж, и *проективная геометрия*, основы которой были созданы в трудах французских математиков Ж. Дезарга и Б. Паскаля (XVII в.). В ее создании важнейшую роль сыграл другой французский математик — Ж. В. Понселе (XIX в.).

Коренной перелом в геометрии впервые произвел в первой половине XIX в. великий русский математик Николай Иванович Лобачевский, который создал новую, *неевклидову геометрию*, называемую ныне *геометрией Лобачевского*. О ней будет идти речь ниже (см гл. 6, § 22).

Открытие Лобачевского было началом нового периода в развитии геометрии. За ним последовали новые открытия немецкого математика Б. Римана и др.

В настоящее время геометрия тесно переплетается со многими другими разделами математики. Одним из источников развития и образования новых понятий в геометрии, как и в других областях математики, являются современные задачи естествознания, физики и техники.

II

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА КРУЖКОВЫХ И ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ

Я глубоко почитаю математику, потому что знакомые с нею видят в ней средство к пониманию всего существующего.

Бхаскара

Глава 5
АЛГЕБРА

§ 1. О ДИОФАНТЕ И ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЯХ. «ПОСЛЕДНЯЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА»

Одним из самых своеобразных древнегреческих математиков был Диофант Александрийский, труды которого имели большое значение для алгебры и теории чисел. До сих пор не выяснены ни год рождения, ни дата смерти Диофанта; полагают, что он жил в III в. н. э. В одном из древних рукописных сборников задач в стихах[1] жизнь Диофанта описывается в виде следующей алгебраической загадки, представляющей надгробную надпись на его могиле[2]:

Прах Диофанта гробница покоит; дивись ей — и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком,
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец;
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил,
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Задача-загадка сводится к составлению и решению уравнения:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x,$$

откуда $x = 84$ — вот сколько лет жил Диофант.

Из работ Диофанта самой важной является «Арифметика», из 13 книг которой только 6 сохранились до наших дней. Эти книги были открыты в Венеции в 1463 г. Регномонтаном, который в связи

[1] Речь идет о греческой «Палатинской антологии», изданной в VI в. грамматиком Метродором.

[2] См.: Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции / Пер. с голл. И. Н. Веселовского. М., 1959, с. 374.

с этим писал, что в произведении Диофанта сосредоточен «весь цвет арифметики, искусство неизвестной».

«Арифметика» посвящена некоему Дионисию, обращаясь к которому Диофант пишет: «Зная, достопочтеннейший Дионисий, что Вы очень усердно изучаете задачи, касающиеся чисел, я взялся изложить природу их и могущество, начиная с самых основ, на которых все это покоится. Это, может быть, покажется более трудным, чем есть на самом деле потому, что еще неизвестно. Начинающие склонны скоро терять мужество. Но Вы легко разберетесь в этом благодаря устремлению Вашего ума и моим пояснениям».

В сохранившихся книгах Диофанта содержится 189 задач с решениями. В первой книге изложены задачи, приводящиеся к определенным уравнениям первой и второй степени. Остальные же пять книг содержат в основном неопределенные уравнения. В этих книгах еще нет систематической теории неопределенных уравнений, методы решения меняются от случая к случаю. Диофант довольствуется каким-нибудь одним решением, целым или дробным, лишь бы оно было положительным.

Тем не менее методы решения неопределенных уравнений составляют основной вклад Диофанта в математику. Известно, что в символике Диофанта был один только знак для неизвестного. Решая неопределенные уравнения, он применял в качестве нескольких неизвестных произвольные числа, вместо которых можно было взять и любые другие, что и сохраняло характер общности его решения.

В Индии, где (как и в Китае) неопределенные уравнения решались в связи с астрономическими запросами и календарными расчетами, ставился вопрос о нахождении именно целочисленных решений неопределенных уравнений. Намеки на общее решение диофантовых уравнений первой степени, т. е. вида $ax + by = c$, встречаются впервые в трудах индийского астронома Ариабхатты[1], подробное же решение изложили индийские математики Брахмагупта и Бхаскара. Общий метод для решения в целых числах неопределенных (диофантовых) уравнений первой степени с целыми коэффициентами был назван в Индии *методом рассеивания* (в смысле размельчения).

Воспользуемся этим методом[2] для решения следующей задачи.

З а д а ч а **33.** «Найти два целых числа, зная, что разность произведений первого на 19 и второго на 8 равна 13».

В задаче требуется найти все целые решения уравнения

$$19x - 8y = 13. \qquad (1)$$

---

[1] См.: Ю ш к е в и ч А. П. История математики в средние века. М., 1961, с. 143.

[2] Изложенный ниже способ не совпадает полностью с индийским способом, но по существу ему равносилен.

Выражая y — неизвестное с наименьшим по абсолютной величине коэффициентом через x, получим:

$$y = \frac{19x - 13}{8}. \tag{2}$$

Нам нужно теперь узнать, при каких целых значениях x соответствующие значения y являются тоже целыми числами. Перепишем уравнение (2) следующим образом:

$$y = 2x + \frac{3x - 13}{8}. \tag{3}$$

Из (3) следует, что y при целом x принимает целое значение только в том случае, если выражение $\frac{3x - 13}{8}$ является целым числом, скажем y_1. Полагая

$$\frac{3x - 13}{8} = y_1, \tag{4}$$

вопрос сводим к решению в целых числах уравнения (4) с двумя неизвестными x и y_1; его можно записать так:

$$3x - 8y_1 = 13. \tag{5}$$

Это уравнение имеет по сравнению с первоначальным (1) то преимущество, что 3 — наименьшая из абсолютных величин коэффициентов при неизвестных — меньше, чем в (1), т. е. 8. Это было достигнуто благодаря тому, что коэффициент при x (19) был заменен остатком от деления на 8.

Продолжая тем же способом, мы получим из (5):

$$x = \frac{8y_1 + 13}{3} = 2y_1 + \frac{2y_1 + 13}{3}. \tag{6}$$

Итак, неизвестное x при целом y_1 только тогда принимает целые значения, когда $\frac{2y_1 + 13}{3}$ есть целое число, скажем y_2:

$$\frac{2y_1 + 13}{3} = y_2, \tag{7}$$

или

$$3y_2 - 2y_1 = 13. \tag{8}$$

Далее,

$$y_1 = \frac{3y_2 - 13}{2} = y_2 + \frac{y_2 - 13}{2}. \tag{9}$$

Полагая

$$\frac{y_2 - 13}{2} = y_3, \tag{10}$$

получим уравнение

$$y_2 - 2y_3 = 13. \tag{11}$$

Это самое простое из всех рассмотренных неопределенных уравнений, так как один из коэффициентов равен 1.

Из (11) получаем:

$$y_2 = 2y_3 + 13. \qquad (12)$$

Отсюда видно, что y_2 принимает целые значения при любых целых значениях y_3. Из равенств (6), (9), (12), (3) путем последовательных подстановок можно найти следующие выражения для неизвестных x и y уравнения (1):

$$x = 2y_1 + y_2 = 2(y_2 + y_3) + y_2 = 3y_2 + 2y_3 =$$
$$= 3(2y_3 + 13) + 2y_3 = 8y_3 + 39;$$
$$y = 2x + y_1 = 2(8y_3 + 39) + y_2 + y_3 = 19y_3 + 91.$$

Таким образом, формулы

$$x = 8y_3 + 39,$$
$$y = 19y_3 + 91$$

при $y_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ дают все целые решения уравнения (1).

В следующей таблице приведены примеры таких решений.

Таблица 1

y_3	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
x	7	15	23	31	39	47	55	63	71
y	15	34	53	72	91	110	129	148	167

Этот прием почти полностью совпадает с методом индийцев и был назван ими методом рассеивания (размельчения) именно потому, что неопределенное уравнение сводится к цепи уравнений со все уменьшающимися по абсолютной величине коэффициентами. К решению неопределенного уравнения первой степени сводятся иногда задачи, связанные с практикой и повседневной деятельностью человека.

Вот один пример.

Задача 34. «Некто покупает в магазине вещь стоимостью в 19 р. У него имеются лишь 15 трехрублевок, у кассира же — лишь 20 пятирублевок. Можно ли расплатиться и как?»

Задача сводится к решению в целых положительных числах диофантова уравнения:

$$3x - 5y = 19,$$

где $x \leqslant 15'$ $y \leqslant 20$[1].

[1] Более того, $y < 9$, так как $3x - 5y > 0$.

Р е ш е н и е.

$$x = \frac{19 + 5y}{3} = 6 + y + \frac{1 + 2y}{3} = 6 + y + y_1.$$

Далее,

$$3y_1 - 2y = 1,$$

$$y = \frac{3y_1 - 1}{2} = y_1 + \frac{y_1 - 1}{2} = y_1 + y_2,$$

$$y_1 - 2y_2 = 1, \quad y_1 = 2y_2 + 1,$$

откуда

$$x = 5y_2 + 8, \quad y = 3y_2 + 1.$$

Ввиду того что x и y должны быть положительными и учитывая условие задачи, легко установить, что

$$0 \leqslant y_2 < 2,$$

т. е. y_2 может принимать только два значения: 0; 1. Отсюда вытекают два возможных решения:

x	8	13
y	1	4

А вот еще одна задача.

З а д а ч а 35. «Можно ли отвесить 28 г некоторого вещества на чашечных весах, имея только четыре гири весом в 3 г и семь гирь весом в 5 г?»[1]

Решим диофантово уравнение:

$$3x + 5y = 28.$$

Имеем:

$$x = \frac{28 - 5y}{3} = 9 - y + \frac{1 - 2y}{3} = 9 - 2y + \frac{1 + y}{3},$$

$$\frac{1 + y}{3} = y_1, \quad y = 3y_1 - 1,$$

$$x = 9 - 2(3y_1 - 1) + y_1 = 11 - 5y_1.$$

Итак,

$$x = 11 - 5y_1,$$

$$y = 3y_1 - 1.$$

[1] Здесь под весом надо понимать массу. Во времена Диофанта вес и массу тела не различали.

Из условий задачи вытекает, что y_1 нельзя давать отрицательные значения (это привело бы к отрицательному y). Далее, должно быть $y_1 < 3$, для того чтобы x не был отрицательным. Значит,

$$0 \leqslant y_1 \leqslant 2.$$

Однако $y_1 = 0$ и $y_1 = 1$ противоречат условию задачи $x \leqslant 4$. Таким образом, возможно только $y_1 = 2$. При этом $x = 1$, $y = 5$ — единственное решение задачи.

Многие старинные способы отгадывания чисел и дат рождения основываются на решении диофантовых уравнений. Так, например, чтобы отгадать дату рождения (месяц и число) собеседника, достаточно узнать у него сумму, получаемую от сложения двух произведений: числа даты (x) на 12 и номера месяца (y) на 31.

З а д а ч а **36**. «Пусть сумма произведений, о которых идет речь, равна 330. Найти дату рождения».

Решим неопределенное уравнение

$$12x + 31y = 330.$$

С помощью метода рассеивания получим:

$$x = 43 - 31y_4,$$

$$y = 6 - 12y_4.$$

Ввиду ограничений

$$0 < x \leqslant 31,$$

$$0 < y \leqslant 12$$

легко констатировать, что единственным решением является

$$y_4 = 1,\ x = 12,\ y = 6.$$

Итак, дата рождения: 12-е число 6-го месяца, т. е. 12 июня.

Индийские ученые решали также системы неопределенных уравнений первой степени со многими неизвестными. Они нашли решение в целых числах некоторых диофантовых уравнений второй степени с двумя неизвестными[1]. Однако общее решение таких уравнений строго изложил впервые знаменитый французский математик XVIII в. Ж. Л. Лагранж.

Задача решения уравнения третьей степени с двумя неизвестными до сих пор не нашла полного решения. Отдельные типы таких уравнений, как и другие задачи неопределенного анализа, решили советские ученые Б. Н. Делоне, А. О. Гельфонд и др.[2] Вообще же алгоритм, с помощью которого можно определить, имеет ли произвольное диофантово уравнение целочисленные решения,

---

[1] В частности, уравнения $y^2 = ax^2 + 1$, названного позже «уравнением Пелля» (Джон Пелль — английский математик XVII в.).

[2] См.: Б у х ш т а б А. А. Теория чисел. М., 1969, гл. 32.

П. Ферма

не найден и даже пока неизвестно, существует ли такой алгоритм.

Одной из знаменитых поныне нерешенных задач в области диофантовых уравнений является так называемая «Великая теорема Ферма».

Пьер Ферма (1601—1665), выдающийся французский математик, был одним из тех ученых, которые в XVII в. развили метод координат и заложили основы высшей математики. По профессии он был юристом и почти всю жизнь занимал должность советника парламента в городе Тулузе. Свободное от служебных обязанностей время Ферма посвящал математическим исследованиям, которые проложили новые пути почти во всех отраслях математики.

Он является одним из создателей теории чисел, т. е. той ветви математики, в которой изучаются свойства целых чисел.

Для исследований Ферма исходным пунктом нередко служила математика древних, в частности «Арифметика» Диофанта, изданная в 1621 г. Баше де Мезириаком. На одной из страниц второй книги своего произведения Диофант решает следующую задачу: «Найти два квадрата, сумма которых тоже является квадратом». Задача сводится к решению в целых числах неопределенного уравнения

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad (1)$$

Это уравнение, называемое «пифагоровым», так как выражает известное из «теоремы Пифагора» метрическое соотношение, связывающее стороны прямоугольного треугольника; имеет бесконечное множество решений, например: 3, 4, 5; 5, 12, 13 и т. д. Все такие тройки чисел x, y, z, удовлетворяющие уравнению (1), называются «пифагоровыми» числами. Чтобы найти их, можно воспользоваться следующими формулами:

$$x = p^2 - q^2,\ y = 2pq,\ z = p^2 + q^2,$$

где p и q — целые, произвольно взятые числа, причем $p > q$. Применяя указанные формулы, легко найти все решения уравнения (1) в натуральных и взаимно простых числах, если для значений p и q взять взаимно простые натуральные числа.

На полях вышеуказанной страницы экземпляра «Арифметики» Диофанта, которым пользовался Ферма, имеется собственноручная заметка последнего: «Наоборот, невозможно разложить куб (т. е. z^3) на два куба или биквадрат (т. е. z^4) на два биквадрата и, вообще, никакую степень, выше второй, нельзя разложить на сумму

двух степеней с тем же показателем. Я нашел поистине удивительное доказательство этого предложения, но поля книги слишком узки, чтобы его изложить».

Итак, речь идет о следующем: доказать, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

не имеет целых решений для $n > 2$.

Это предложение и было названо «Великой, или большой, теоремой Ферма» или «Последней теоремой Ферма». Ни в произведениях, ни в бумагах или письмах Ферма не осталось следов доказательства, о котором он говорит в вышеуказанной записи на полях «Арифметики» Диофанта. Начиная с XVIII в. были сделаны большие усилия для доказательства теоремы Ферма. В 70-х годах XVIII в. Эйлер ее доказал для $n = 3$ и $n = 4$. Для $n = 5$ доказательство было дано в 20-х годах XIX в. Лежандром и Дирихле. В 1837 г. французский математик Г. Ламэ дал доказательство для $n = 7$.

Известный успех был достигнут в рассматриваемой задаче немецким математиком Е. Куммером, наметившим общий подход к проблеме, с помощью которого он нашел доказательства для всех простых чисел, содержащихся между 3 и 100. Широкая известность «Большой теоремы Ферма» и нездоровый ажиотаж к поискам ее доказательства возникли в 1907 г., когда за ее решение была объявлена премия в 100 000 немецких марок. Эта премия из-за ряда инфляций в Германии была впоследствии аннулирована.

В 1960 г. посредством вычислений, выполненных на ЭВМ, было найдено, что эта теорема верна для всех $n \leqslant 2521$, а несколько позже — для $n \leqslant 4002$.

В настоящее время с помощью ЭВМ установлено, что «Большая теорема Ферма» верна для всех $n \leqslant 10\,000$. Однако общего доказательства теоремы Ферма (для любого n) до сих пор не найдено. Несмотря на это, усилия, сделанные в направлении доказательства этой теоремы, не были напрасными, так как они содействовали возникновению и развитию новых математических понятий, теорем и так называемой «алгебраической теории чисел». Тот факт, что теорема Ферма не могла быть ни доказана, ни опровергнута до настоящего времени, поставил перед многими учеными следующий вопрос: обладал ли действительно Ферма правильным доказательством теоремы?[1]

§ 2. О ТЕРМИНЕ И ПОНЯТИИ «АЛГОРИТМ»[2]

Долгое время, начиная с середины XII в., «алгоритмом» или «алгоризмом» называли любой труд, в котором излагалась ариф-

[1] См.: Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М., 1960, с. 71—82.

[2] См.: Евклид. Начала. М. — Л., 1949, кн. VII—X, с. 11—12; 274—275.

метика, основанная на позиционной десятичной системе счисления с употреблением индийско-арабских цифр. Позже так стали называть систему правил письменного счета в десятичной позиционной нумерации[1].

Постепенно слово «алгоритм» стало обозначать всякий систематизированный прием вычисления[2]. Именно в этом смысле термин «алгоритм» (или «алгорифм») применяется в математике и ныне, означая систему правил, следуя которым можно решить задачу определенного типа, совершая в твердо установленном порядке ряд известных вычислительных операций. Одним из простейших алгоритмов является, например, правило сложения двух многозначных чисел в позиционной десятичной нумерации. Если задана таблица сложения чисел от 0 до 9, то алгоритм сложения в данном случае сводится к последовательной записи суммы двух чисел согласно таблице с учетом возможного переноса единицы. Аналогично можно говорить об алгоритме вычитания, умножения или деления.

Само понятие алгоритма появилось намного раньше употребляемого ныне термина, оно складывалось и применялось в науке с древнейших времен. Широко известен в математике так называемый алгоритм Евклида.

Учащиеся знакомы с понятием общего делителя двух или нескольких натуральных чисел. Наибольшим общим делителем (коротко НОД)[3] данных чисел называется самый большой из общих делителей, т. е. самое большое число, на которое делится каждое из данных чисел. Например, НОД чисел 18 и 12 есть 6. То, что число d является НОД чисел a и b, коротко обозначают так: $d = (a,b)$. Например, $6 = (18,12)$.

Для нахождения НОД можно применить способ, аналогичный способу нахождения НОК, а именно: а) каждое из данных чисел разлагается на произведение простых множителей; б) составляется произведение общих простых множителей с наименьшими показателями.

Для вышеуказанного примера имеем:

$$18 = 2 \cdot 3^2,$$

$$12 = 2^2 \cdot 3.$$

Отсюда

$$(18,12) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Однако не всегда разложение данных чисел на простые множители дается легко. Оно является особенно утомительным, если данные числа являются большими и в то же время их общие делители —

---

[1] См.: Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века / Пер. А. П. Юшкевича. М. — Л., 1938, с. 200.

[2] Так оно применяется, например, в алгебре Рудольфа 1525 г. (см. рис. 2).

[3] В современной программе понятие НОД, как известно, изъято.

числа многозначные, для которых признаки делимости школьникам неизвестны (11, 13, 23 и т. д.). В таких случаях удобнее пользоваться другим способом нахождения НОД, впервые изложенным в VII книге «Начал» Евклида и названным поэтому «алгоритмом Евклида» (или «способом последовательного деления»). Этот способ основывается на следующих свойствах НОД:

а) если a делится на число b без остатка, то b есть НОД чисел a и b; например, 48 делится без остатка на 16, поэтому $(48,16) = 16$;

б) если a не делится на b без остатка, а при делении получается остаток r, т. е. $a = b \cdot q + r$, то $(a,b) = (b,r)$, что легко доказывается на основе признаков делимости произведения и разности двух чисел. Например, пусть $a = 48$, $b = 15$; разделив a на b, т. е. 48 на 15, получим частное $q = 3$ и остаток $r = 3$. Значит, $48 = 15 \times \times 3 + 3$; $(48, 15) = (15, 3) = 3$. В данном случае остаток ($r = 3$) является делителем числа $b = 15$, в общем же случае это обстоятельство не имеет места, и тогда приходится разделить первый остаток на второй и т. д., пока не получится частное без остатка.

Пример. Найти (213, 126).

Произведем следующий ряд последовательных делений:

1) $213 : 126 = 1$, первый остаток $r_1 = 87$;
2) $126 : 87 = 1$, второй остаток $r_2 = 39$;
3) $87 : 39 = 2$, третий остаток $r_3 = 9$;
4) $39 : 9 = 4$, четвертый остаток $r_4 = 3$;
5) $9 : 3 = 3$, пятый остаток $r_5 = 0$.

Последний отличный от нуля остаток, в данном случае $r_4 = 3$, есть НОД данных чисел, так как $(213, 126) = (126, 87) = (87, 39) = (39, 9) = (9, 3) = 3$.

Последовательное деление обычно располагается в следующем виде:

$$
\begin{array}{r|l}
213 & 126 \\
-126 & \hline
87 & 1 \\
\hline
126 & \\
-87 & \hline
39 & 2 \\
\hline
87 & \\
-78 & \hline
9 & 4 \\
\hline
39 & \\
-36 & \hline
3 & 3 \\
\hline
9 & \\
-9 & \hline
0. &
\end{array}
\qquad (1)
$$

Чтобы убедиться в преимуществе приема последовательного деления над приемами разложения на простые множители, когда имеем дело с большими числами, рассмотрим следующий пример.

Найти (4847, 4181).

Разложение данных чисел на простые множители является делом нелегким, так как ни одно из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 9, для которых устанавливаются в школе признаки делимости, не является делителем данных чисел. Алгоритм же Евклида легко и быстро приводит к результату: $(4847, 4181) = 37$. (Проверьте!)

Вместо (1) можно писать:

$$\begin{aligned} 213 &= 126 \cdot 1 + 87, \\ 126 &= 87 \cdot 1 + 39, \\ 87 &= 39 \cdot 2 + 9, \\ 39 &= 9 \cdot 4 + 3, \\ 9 &= 3 \cdot 3 + 0. \end{aligned}$$

В общем случае для данных чисел a и b имеем:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q_1 + r_1 \quad (0 < r_1 < b), \\ b &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1), \\ r_1 &= r_2 \cdot q_2 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n \quad (0 < r_n < r_{n-1}). \end{aligned}$$

Ввиду того что остатки $r_1, r_2, r_3, \ldots$, являющиеся положительными числами, меньшими b, последовательно убывают, то после конечного числа делений должен получиться остаток 0.

Итак, $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots (r_{n-2}, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_n) = r_n$.

Второе предложение VII книги «Начал» Евклида так и утверждает, что при $r_{n+1} = 0$ r_n есть НОД чисел a и b. Евклид, конечно, не употреблял современной символики. Он и не делил a на b, а вычитал b последовательно несколько раз из a, пока не получал остаток $r_1 < b$, аналогично из b вычитал повторно r_1, пока не получал $r_2 < r_1$, и т. д.

Замена последовательного деления последовательным вычитанием объясняется тем, что Евклид описывал процесс нахождения НОД в *геометрической форме*, число он мыслил как геометрический образ, как отрезок, а действия над числами — как действия над отрезками. В соответствии с этим сам НОД a и b Евклид называет «наибольшей общей мерой» двух чисел.

Алгоритм Евклида играет важную роль во многих вопросах теории чисел, в том числе и при решении диофантовых уравнений.

В современной математике алгоритм, позволяющий решить поставленную задачу с помощью четырех арифметических действий, называют численным алгоритмом. Он задается словесно или с помощью формул. Например, для решения линейного уравнения $ax + b = 0$ алгоритм задается формулой $x = -\frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$. Алгоритм для решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

задается с помощью формул

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Начиная с древнейших времен одной из важнейших целей математики являлось нахождение алгоритмов для решения тех или иных типов задач. В средние века математики долго искали алгоритм алгебраического решения уравнения третьей степени. Как известно, он был найден в первой половине XVI в. итальянскими математиками и выражен в виде «формулы Кардано» (см. гл. 5, § 8).

Из сказанного ясно, как важно найти тот или иной алгоритм, с помощью которого решается не одна лишь задача, а ряд однотипных задач.

Омар Хайям

Понятие алгоритма применяется в современной науке и при решении логических задач, и в теории автоматических вычислительных машин (машинные алгоритмы)[1]. Об этом учащиеся узнают в старших классах в математическом кружке.

§ 3. ОМАР ХАЙЯМ — МАТЕМАТИК И ПОЭТ

Одним из крупнейших средневековых алгебраистов[2] был персидский и таджикский ученый и поэт Омар Хайям (1048 — 1131). Он родился в семье ремесленника в городе Нишапуре (ныне Северный Иран), к югу от Ашхабада, жил и работал в Самарканде, Исфахане и других городах Средней Азии и Ирана. Когда он был еще молодым, бóльшая часть Среднего Востока была захвачена сельджуками[3]. Положение честных ученых, которых преследовали властители, было крайне тяжелым. Вот что пишет об этом сам Омар Хайям в предисловии к своей «Алгебре»: «Я был лишен возможности систематически заниматься вопросом и не мог сосредоточиться на размышлении о нем, так как обстоятельства заставляли меня терять много времени. Мы были свидетелями гибели уче-

---

[1] См.: Трахтенброт Б. А. Алгоритмы и машинное решение задач. Популярные лекции по математике. М., Физматгиз, 1957, вып. 26.

[2] См.: Омар Хайям. Рубайат, 1959, ч. 1—2; его же. Трактаты, 1961, и др.

[3] Феодальная династия туркменского происхождения, названная по имени ее основателя — Сельджука. Сельджукское государство, созданное в середине XI в., охватывало ряд стран Ближнего и Среднего Востока и распалось в XII в. Отдельные ветви сельджуков правили в княжествах Малой Азии до XIV в.

ных, от которых осталась небольшая многострадальная кучка людей. Суровость судьбы в эти времена препятствует им всецело отдаться совершенствованию и углублению своей науки. Большая часть тех, которые в настоящее время имеют вид ученых, одевают истину ложью, не выходя в науке за пределы подделки и лицемерия. И если они встречают человека, отличающегося тем, что он ищет истину и любит правду, старается отвергнуть ложь и лицемерие и отказаться от хвастовства и обмана, они делают его предметом своего презрения и насмешек».

В молодости Омар Хайям увлекался астрономией и математикой, позже в нем пробудился интерес к географии, философии и поэзии. Первое его математическое сочинение — «Трудности арифметики» — до нас не дошло. Благодаря материальной помощи, оказанной ему одним самаркандским меценатом, Хайям смог продолжать свои научные исследования и написать важнейший труд — «О доказательствах задач алгебры и алмукабалы».

Эта книга содержала почти всю совокупность алгебраических знаний того времени. В ней дается классификация уравнений и излагается решение уравнений первой, второй и третьей степени. Во введении автор утверждает, что алгебра — это наука об определении неизвестных величин, состоящих в некоторых отношениях с величинами известными. Определение неизвестных осуществляется с помощью составления и решения уравнений. Это первое дошедшее до нас определение алгебры как науки. «Обычно, — пишет Хайям, — алгебраисты называют неизвестную «вещью»[1], ее произведение на себя — «квадратом», произведение квадрата на нее — «кубом», квадрата на себя — «квадрато-квадратом», куба на квадрат — «квадрато-кубом», куба на себя — «кубо-кубом» и т. д.

Алгебра Хайяма чисто словесная. «Неизвестная» в концепции Хайяма может быть либо числом, разумеется лишь целым и положительным, либо геометрической величиной: отрезком, площадью или объемом. Хайям говорит о важности численного решения, однако считает основным геометрическое построение искомого корня, т. е. отрезка. Здесь сказалось влияние «геометрической алгебры» древних.

Хайям решает некоторые виды уравнений, содержащие величины, обратные неизвестной и их степени.

Вот два примера.

З а д а ч а 37. Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}. \qquad (1)$$

Это уравнение формулируется у Хайяма следующим образом: «Доля квадрата равна половине доли корня». Автор указывает, что «это то же, как если бы сказали: квадрат равен половине корня», т. е. при подстановке $\frac{1}{x} = y$ уравнение (1) равносильно уравнению

[1] См. гл. 1, § 4, 13.

$$y^2 = \frac{1}{2}\, y. \tag{2}$$

Корнем (2) является $y = \frac{1}{2}$, поэтому корнем (1) будет $x = 2$.

Задача 38. «Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} = 1\,\frac{1}{4}\gg. \tag{3}$$

С помощью той же подстановки приводим (3) к уравнению

$$y^2 + 2y = 1\,\frac{1}{4}, \tag{4}$$

корнем которого является $y = \frac{1}{2}$. Значит, $x = 2$.

Славу Хайяма как алгебраиста создала теория геометрического решения уравнений третьей степени, в разработку которой он внес значительный вклад. Перед учеными того времени стояла задача классифицировать кубические уравнения, построить общую теорию геометрического решения их и дать систему исследования корней. Эта задача в большей мере была выполнена Хайямом. В некотором отношении, касающемся вопросов применения алгебры к геометрии (перечисление кривых, необходимых для построения тех или иных типов уравнений и др.), идеи Хайяма напоминают воззрения создателя новой «аналитической» геометрии — Рене Декарта.

* * *

Благодаря покровительству одного из министров султана Омар Хайям стал в 1074 г. придворным астрономом и советником Меликшаха. Через два года в его распоряжение была предоставлена обсерватория в Исфахане, крупнейшем в то время городе Ближнего Востока. Хайям составил астрономические таблицы и руководил реформой старого персидского календаря. Согласно дошедшей до нас легенде в календаре Хайяма, отличавшемся большой точностью, на каждые 33 года приходится 8 високосных лет, вследствие чего ошибка на один день накапливается в течение 5000 лет, в то время как в нашем григорианском календаре та же ошибка накапливается за 3300 лет. Однако в действительности Хайям реформу календаря до конца довести не успел.

В 1077 г. Хайям закончил работу над важнейшим математическим трудом — «Комментарии к трудным постулатам книги Евклида». Этот трактат состоит из трех книг. Первая содержит оригинальную теорию параллельных прямых, вторая и третья посвящены усовершенствованию теории отношений и пропорций.

Другая математическая работа Хайяма, названная «Об искусстве определения количества золота и серебра в состоящем из них теле», посвящена классической задаче на смешение, решенной Ар-

химедом по просьбе сиракузского царя Гиерона. Хайям написал несколько трактатов по естествознанию, географии и философии.

Параллельно с занятиями наукой Хайям создавал свои бессмертные стихи, известные всему миру под названием «Рубаи» (или «Четверостишия»). Поэзия Хайяма пронизана духом пренебрежения к религии, стремлением к радостной земной жизни. Тяжело переживая постоянную свою зависимость от богатых меценатов и отсутствие свободы личности, поэт пишет:

О если б каждый день иметь краюху хлеба,
Над головою кров и скромный угол, где бы
Ничьим владыкою, ничьим рабом не быть —
Тогда благословить за счастье можно небо!

Отвергая веру в потусторонний мир, Хайям высмеивает суеверия, страх перед грехами и обращается к богу со следующими словами:

У мертвых и живых один владыка — ты;
Кто небо завертел над ними дико? Ты.
Я тварь греховная, а ты создатель мира;
Из нас виновен кто? Сам рассуди-ка ты.

Как настоящий ученый, Хайям был скромен, он сознавал, что лишь очень небольшая часть всех тайн Вселенной известна ему, и пишет:

Меня философом враги мои зовут,
Однако, — видит бог, — ошибочен их суд.
Ничтожней много я: ведь мне ничто не ясно.
Не ясно даже то, зачем и кто я тут.

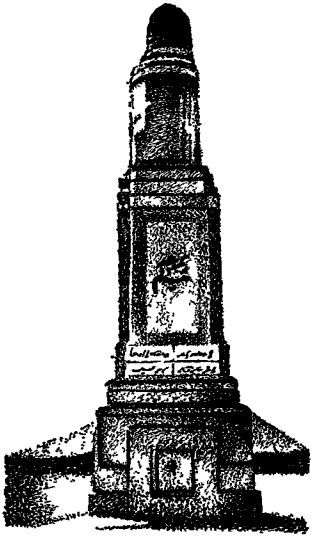


Рис. 42. Обелиск на могиле Омара Хайяма (воздвигнут в 1934 г.)

В 1092 г. был убит покровитель Хайяма, умер и Мелик-шах. Новые правители государства Сельджуков выдвинули против поэта обвинение в безбожии.

Лишившись поддержки вельмож, преследуемый за вольнодумие, Хайям опять стал бедным скитальцем. До конца жизни нищета и невзгоды не покидали его.

Бедный, разочарованный и оскорбленный, Хайям скончался в родном Нишапуре (рис. 42). Реакционные, религиозные мусульманские деятели стремились оклеветать ученого и поэта-философа и предать забвению имя Омара Хайяма. Однако это им не удалось. В XVIII в. имя Хайяма и его труды стали известны европейским математикам и ученым. В середине XIX в. в Европе получила

большое распространение его поэзия. В настоящее время Омар Хайям по праву оценивается как одна из самых видных фигур в истории мировой поэзии и науки.

§ 4. ТЕОРИЯ ОТНОШЕНИЙ И РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА В СТРАНАХ БЛИЖНЕГО И СРЕДНЕГО ВОСТОКА

Ученые средневекового Востока, важнейшие сочинения которых были основательно изучены советскими учеными за последнее двадцатилетие, как известно, внесли значительный вклад в развитие математики, в частности алгебры и тригонометрии. В этом параграфе мы остановимся на принципиально важных вопросах, которыми занимались названные ученые в период между VIII и XVI вв.[1].

В странах Ближнего и Среднего Востока ученые черпали математические знания главным образом из древнегреческих и индийских источников. Особенно большой популярностью пользовались «Начала» Евклида, которые на протяжении вышеуказанного периода десятки раз переводили и комментировали в этих странах.

В своем трактате «Об отношении» иранец Мухаммед ал-Махани (IX в.), один из первых комментаторов Евклида на Среднем Востоке, стремился не только облегчить понимание V книги «Начал», но и связать теорию отношений непрерывных величин Евдокса с теорией отношений чисел. В том же направлении шли последовавшие за ним ан-Найризи (IX—X вв.), Ибн ал-Хайсам (X — XI вв.) и др. Признавая правильность евдоксова определения равенства отношений, эти ученые выражали недовольство тем, что оно не раскрывает настоящего смысла понятия пропорции, связанного с процессом измерения одной величины с помощью другой, как это имеет место для соизмеримых величин.

Обстоятельно излагает теорию отношений Омар Хайям во II и III книгах своих «Комментариев к трудностям во введениях книги Евклида» (1077) (рис. 43). Соглашаясь с аристотелевой точкой зрения, он так формулирует принцип непрерывности: «Величины можно делить до бесконечности, т. е. они не состоят из не-

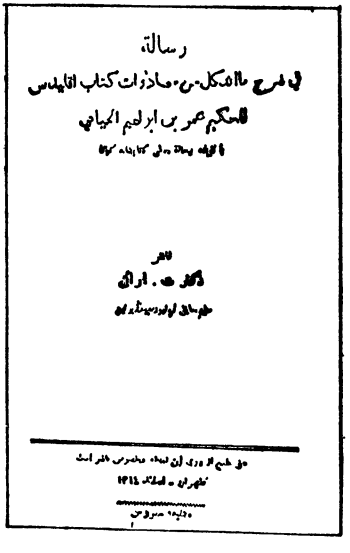


Рис. 43. Титульный лист трактата Хайяма «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида», опубликованного в Тегеране в 1936 г.

[1] См.: Юшкевич А. П. История математики в средние века. М., 1961, с. 168 и сл.

делимых». Вместе с этим Хайям идет дальше и ставит перед собой задачу сближения и даже слияния теории отношений чисел, изложенной в VII книге «Начал», с общей теорией отношений V книги. Показав основанный на алгоритме Евклида способ нахождения с любой точностью приближенных значений отношений несоизмеримых величин, он вводит новое определение пропорции, в котором равенство отношений сводится к совпадению их разложения в непрерывные дроби. Он доказывает эквивалентность построенной им теории отношений с теорией Евклида и, основываясь на упомянутом принципе непрерывности, устанавливает при этом существование четвертой, пропорциональной к трем данным.

Третью книгу своих «Комментариев» Хайям посвящает *составлению*, т. е. умножению, отношений. Вот тут-то Хайям трактует по-новому связь понятий отношения и числа. Рассматривая отношение двух непрерывных геометрических величин A и B, он рассуждает так: «Выберем единицу и сделаем ее отношение к величине G равным отношению A к B и будем смотреть на величину G как на линию, поверхность, тело или время; но будем смотреть на нее как на величину, отвлеченную разумом от всего этого и принадлежащую к числам, но не к числам абсолютным и настоящим (т. е. натуральным. — *Г. Г.*), так как отношение A к B часто может не быть числовым, т. е. нельзя найти двух чисел, отношение которых было бы равно этому отношению. Поэтому вычислители и землемеры часто говорят: половина единицы, или треть ее, или какая-нибудь другая доля ее, в то время как единица неделима: они рассматривают не абсолютную, настоящую единицу, из которой образуются настоящие числа, а предполагают единицу делимой. Далее они сравнивают величины с этой делимой единицей и с числами, образованными из нее. Они часто говорят: корень из пяти, корень из десяти и т. д. — их слова, действия и измерения изобилуют этими выражениями, при этом они имеют в виду число пять, состоящее из указанных делимых единиц. Следует, чтобы ты знал, что эта единица является делимой и величина G, являющаяся произвольной величиной, рассматривается как число в указанном нами смысле»[1].

Таким образом, в соответствии с поставленной задачей, о которой говорилось выше, и в целях заполнения существовавшего разрыва между понятиями числа и отношения Хайям высказывается за введение в математику делимой единицы и нового рода чисел, с помощью которых можно было бы выразить любые отношения величин. По существу он выдвигает идею обобщения понятия числа и расширения его до действительного положительного числа. В отличие от Евклида и других древнегреческих математиков и философов Хайям не только не противопоставляет числа непрерыв-

[1] См.: Омар Хайям. Математические трактаты / Пер. Б. А. Розенфельда. — ИМИ, 1952, вып. VI, с. 105—106.

ным величинам, геометрию — арифметике, а намечает конкретные пути к выявлению единства противоположностей, к ликвидации пропасти между дискретностью и непрерывностью. В частности, относительно взаимосвязи геометрии с арифметикой Хайям пишет: «Геометрия нуждается в числах. Как можно отрицать это, если треугольник есть то, что окружено тремя линиями, и как может понять треугольник тот, кто не знаком с понятием (числа) три? Таким образом, три есть составная часть (понятия) треугольника, его причина и по существу предшествует ему. Изучение числа отличается от изучения геометрии; это две науки, только одна из которых применяется в другой. Геометрия в некоторых своих доказательствах нуждается в числах...»[1].

Своими стремлениями к синтезу арифметической и геометрической теорий отношений и пропорций, изложенных в «Началах» Евклида, к отождествлению понятий числа и отношения и к изучению геометрии с помощью учения о числах Хайям в известной мере предвосхитил как Декарта, создателя аналитической геометрии, так и Лежандра, впервые осуществившего в своих «Элементах геометрии» (1794) арифметизацию и алгебраизацию элементарной геометрии.

Идеи Хайяма не были, конечно, случайными. Они возникли вследствие быстро развивавшейся в то время вычислительной математики. Недаром в приведенной выше цитате Хайям ссылается на практику вычислителей и землемеров. Составление астрономических таблиц, развитие алгебры и ее приложений, тригонометрические и геометрические расчеты и вычисления приводили к действиям с иррациональными числами, в частности с квадратичными иррациональностями. Последние составляют, как известно, предмет X книги «Начал» Евклида. Вскрытие арифметического содержания этой книги учеными стран Ближнего и Среднего Востока дало им возможность несколько развить учение о действиях над радикалами. Все это способствовало широкому применению иррациональных чисел наряду с рациональными и смягчению разрыва между понятиями числа и непрерывной геометрической величины.

Некоторое дальнейшее развитие идей Хайяма мы находим в двух произведениях Насир ад-Дина ат-Туси — в работе «Изложение Евклида» и в «Трактате о полном четырехстороннике». В последнем содержится обстоятельная теория составных отношений. Здесь каждому отношению ставится в соответствие «его количество», число и вместо составления отношений производится умножение соответствующих количеств. Как и Хайям, ат-Туси считает, что конечные непрерывные величины нельзя рассматривать как множества актуально бесконечно малых величин, неделимых точек, но в отличие от Хайямы он допускает образование линий с помощью движения точек.

---

[1] Омар Хайям. Математические трактаты / Пер. Б. А. Розенфельда. — ИМИ, 1952, вып. VI, с. 104.

Произведения ат-Туси, одно из которых было опубликовано в Риме в конце XVI в., а затем переведено на латинский язык, оказали влияние и на некоторых европейских математиков XVII в.

§ 5. ОБ ЭВОЛЮЦИИ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

Среди чисел существует такое совершенство и согласие, что нам надо размышлять дни и ночи над их удивительной закономерностью...

Стевин

Число — одно из основных понятий математики — зародилось в глубокой древности. Понятие о *натуральном числе*, возникшее в связи с практической необходимостью *считать* предметы, складывалось очень медленно. На протяжении веков это понятие постепенно подвергалось расширению и обобщению. Потребности измерять и делить величины привели к понятию дробных положительных чисел, включающих как частный случай натуральные числа. Из практики решения алгебраических уравнений и теоретических потребностей возникло затем понятие отрицательных чисел. Эти числа наряду с положительными числами дают возможность измерять направленные величины (температуру, время). Нуль, вначале означавший отсутствие числа, стал рассматриваться как число лишь после введения отрицательных чисел.

В результате указанной эволюции появилось множество рациональных чисел, включающее нуль, все положительные и отрицательные целые[1] и дробные числа. Новые запросы практики и науки требовали дальнейшего расширения понятия числа. Еще в V в. до н. э. в школе Пифагора было доказано, что множество рациональных[2] чисел недостаточно для точного измерения любых отрезков, т. е. было доказано существование несоизмеримых отрезков. К открытию несоизмеримости приводили, вероятно, попытки решения на первый взгляд таких простых задач, как нахождение длины стороны квадрата, площадь которого равна 2, или числа, квадрат которого равен 2, и т. п.[3].

Сущность приводимого в современных учебниках доказательства от противного о том, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, восходит к древности. Его можно найти в конце X книги «Начал» Евклида (оно приведено не во всех сохранившихся рукописях «Начал»[4]). Его содержание сводится к следующему:

---

[1] К целым числам причисляется и нуль.

[2] Точнее, *нуля, положительных целых* и *дробных чисел*, так как отрицательных чисел пифагорейцы не знали.

[3] Некоторые историки считают, что несоизмеримость отрезков открыл в середине V в. до н. э. пифагореец Гиппас Метапонтский в поисках общей меры стороны и диагонали правильного пятиугольника при построении «золотого сечения».

[4] См.: Евклид. Начала / Пер. с греч. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского. М. — Л., 1949.

пусть $ABCD$ — квадрат, $|AC|$ — его диагональ (у Евклида — «диаметр»), отношение стороны $|AB|$ к диагонали $|AC|$ равно отношению двух целых чисел p и q. Эти числа не являются оба четными, в противном случае можно было бы сократить дробь.

Итак, $\frac{|AB|}{|CA|} = \frac{p}{q}$, а по теореме Пифагора $q^2 = 2p^2$. Значит, q^2, а на основе теории делимости и само q — четные числа. Тогда p должно быть нечетным. Но из того, что $q = 2k$, следует, что $q^2 = 4k^2 = 2p^2$; $p^2 = 2k^2$, т. е. p^2, значит, и p — четное. Полученное противоречие состоит в том, что p должно быть одновременно четным и нечетным.

Об этом доказательстве, являющемся первым примером доказательства невозможности в математике, упоминается в «Аналитиках» Аристотеля. В его трудах и в произведениях Платона имеется несколько замечаний, свидетельствующих о том, что открытие несоизмеримых отрезков явилось источником большого кризиса в древнегреческой математике и в конечном итоге поворотным пунктом в ее развитии. Это открытие явно противоречило учению школы Пифагора, будто с помощью одних целых чисел и отношений между ними можно выразить любую величину. Вначале пифагорейцы старались держать в секрете новое открытие. Об этом рассказано в одной легенде, согласно которой Гиппас Метапонтский, открывший существование несоизмеримости, погиб во время кораблекрушения, будучи наказан богами за выдачу секрета.

В конце V в. до н. э. Теодор Киренский (учитель Платона), продолжая дело Гиппаса, сумел доказать, что стороны квадратов, имеющих площади 3, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17 кв единиц, тоже несоизмеримы со стороной единичного квадрата, т. е., выражаясь современными терминами, иррациональны. Теодор был уже седовласым старцем, когда одно из его сообщений о несоизмеримых отрезках вызвало интерес у молодого афинского ученого Теэтета. Выслушав Теодора, Теэтет стал сам размышлять над проблемой и решил более общую задачу, доказав иррациональность $\sqrt{N}$ для любого целого числа N, не являющегося полным квадратом[1]. Теэтет первый предпринял классификацию некоторых типов иррациональностей.

Убедившись в том, что существует бесчисленное множество отрезков и других геометрических величин, которые с помощью целых и дробных (вообще рациональных) чисел измерить нельзя, пифагорейцы не могли еще осознать необходимость расширения понятия числа, но сделали другой вывод: надо обосновать геометрию и алгебру не с помощью учения о числах (арифметики), а с помощью самой геометрии. Так возникла и развилась так называемая геометрическая алгебра.

[1] См.: Бурбаки Н. Очерки по истории математики / Пер. с франц. И. Г. Башмаковой. М., 1963, с. 147 и сл.; Ван дер Варден Л. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции/ Пер. с голл. И. Н. Веселовского. М., 1959, с. 197 и сл.

Древнегреческие математики стали представлять целые числа и любые величины, соизмеримые и несоизмеримые, *геометрически*, с помощью отрезков, прямоугольников и других фигур. Отсюда у них появились такие названия, как: 1) «плоские числа» для чисел вроде $6 = 2 \cdot 3$, $14 = 7 \cdot 2$, являющихся произведениями двух сомножителей и выражающих площадь прямоугольника, построенного на соответствующей паре отрезков; 2) «квадратные числа»: $4(= 2 \cdot 2)$, $81(= 9 \cdot 9)$ и т. д. Это название употребляется и поныне; 3) «телесные числа»: $24(= 2 \cdot 3 \cdot 4)$, $210(= 5 \cdot 6 \cdot 7)$ и т. д., являющиеся произведениями трех чисел и изображаемые с помощью параллелепипедов; 4) «кубические числа»: $8(= 2 \cdot 2 \cdot 2)$, $125(= 5 \times \times 5 \cdot 5)$ и т. п.

На геометрической базе строил свою общую теорию отношений и пропорций крупный математик древности Евдокс Книдский (IV в. до н. э.). Глубокие идеи этой теории, изложенной в V книге «Начал» Евклида и содержащей по существу строгое учение о действительном положительном числе, смогли быть по достоинству оценены лишь во второй половине XIX в. Будучи неудобной с точки зрения нужд практики и алгебраического исчисления, эта теория на протяжении веков не оказывала почти никакого влияния на дальнейшее развитие понятия числа.

В Древней Греции I — IV вв., в Индии и других странах Азии и в средневековой Европе продолжали господствовать наивные представления о числе и чисто практическая точка зрения, позволяющая заменять точное число его приближенным значением.

§ 6. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА В ДРЕВНОСТИ И В СРЕДНИЕ ВЕКА. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА КАК БЕСКОНЕЧНЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ В XVI — XVII вв.

Термин «рациональное» (число) происходит от латинского слова ratio — отношение, которое является переводом греческого слова «логос». Рациональным является число, которое может быть представлено как *отношение двух целых чисел*, выражающих однородные соизмеримые величины. В отличие от рациональных чисел числа, выражающие отношение несоизмеримых величин, были названы еще в древности *иррациональными*, т. е. нерациональными (по-гречески «алогос»). Правда, первоначально термины «рациональный» и «иррациональный» относились не к числам, а к соизмеримым и соответственно несоизмеримым величинам, которые пифагорейцы называли *выразимыми* и *невыразимыми*, Теодор Киренский же — *симметричными* и *асимметричными*. В V — VI вв. римские авторы М. Капелла и Кассиодор переводили эти термины на латынь словами rationalis и irrationalis. Термин «соизмеримый» (commensurabilis) ввел в первой половине VI в. другой римский автор — Боэций.

Древнегреческие математики классической эпохи не пользовались другими числами, кроме рациональных (вернее, целых и дробных положительных). В своих «Началах» Евклид излагает учение об иррациональностях чисто геометрически. Однако уже с начала нашей эры в противовес громоздкой и ограниченной в своих возможностях геометрической алгебре в Греции и в странах Востока начинается развитие алгебры, опирающейся не на геометрию, а на арифметику, развитие вычислительных методов, необходимых для астрономии, для плоской и сферической тригонометрии.

Математики Индии, Ближнего и Среднего Востока, развивая алгебру, тригонометрию и астрономию, не могли обойтись без иррациональных величин, которые, однако, длительное время не признавали за числа. Греки называли иррациональную величину, например корень из неквадратного числа, «алогос» — невыразимое словами; арабы перевели этот термин, означающий также «немой», словом «асамм», а позже европейские переводчики с арабского на латынь перевели это слово латинским словом surdus — глухой. В Европе термин surdus — глухой впервые встречается в середине XII в. у Герарда Кремонского, известного переводчика математических произведений с арабского на латынь, затем у итальянского математика Леонардо Фибоначчи и других европейских математиков вплоть до XVIII в. Правда, уже в XVI в. отдельные ученые, в первую очередь итальянский математик Рафаэль Бомбелли и нидерландский математик Симон Стевин, считали понятие иррационального числа равноправным с понятием рационального числа. Стевин писал: «*Мы приходим к выводу, что не существует никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, необъяснимых или глухих чисел, но что среди чисел существует такое совершенство и согласие, что нам надо размышлять дни и ночи над их удивительной закономерностью*»[1].

Еще до Бомбелли и Стевина многие ученые стран Ближнего и Среднего Востока в своих трудах употребляли иррациональные числа как полноправные объекты алгебры. Более того, комментируя «Начала» Евклида и исследуя общую теорию отношений Евдокса, Омар Хайям уже в начале XII в. теоретически расширяет понятие числа до положительного действительного числа. В этом же направлении много было сделано крупнейшим математиком XIII в. ат-Туси.

Математики и астрономы Ближнего и Среднего Востока вслед за астрономами Древнего Вавилона и эллинистической эпохи широко пользовались шестидесятеричными дробями, арифметические действия с которыми они называли «арифметикой астрономов». По аналогии с шестидесятеричными дробями самаркандский ученый XV в. ал-Каши в работе «Ключ арифметики» ввел десятичные дроби, которыми он пользовался и для повышения точности извлече-

[1] Цит. по кн.: Бурбаки Н. Очерки по истории математики / Пер. с франц. И. Г. Башмаковой. М., 1963, с. 151.

ния корней[1]. Независимо от него по такому же пути шел открывший в 1585 г. десятичные дроби в Европе Симон Стевин, который в своих «Приложениях к алгебре» (1594) показал, что десятичные дроби можно использовать для бесконечно близкого приближения к действительному числу. Таким образом, уже в XVI в. зародилась идея о том, что естественным формальным аппаратом для введения и обоснования понятия иррационального числа являются десятичные дроби. Появление «Геометрии» Декарта облегчило понимание связи между измерением любых отрезков (и геометрических величин вообще) и необходимостью расширения понятия рационального числа. На числовой оси иррациональные числа, как и рациональные, изображаются точками. Это геометрическое истолкование позволило лучше понять природу иррациональных чисел и способствовало их признанию.

В современных учебных руководствах основа определения иррационального числа опирается на идеи ал-Каши, Стевина и Декарта об измерении отрезков и о неограниченном приближении к искомому числу с помощью бесконечных десятичных дробей. Однако обоснование свойств действительных чисел и полная теория их была разработана лишь в XIX в. Об этом рассказано в § 7.

§ 7. КРАТКИЙ ОБЗОР РАЗВИТИЯ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА XVII — XIX вв.

Связанное с прогрессом экономики, торговли и астрономии, развитие вычислительной математики привело и европейских ученых XVI — XVII вв. к критике евклидова противопоставления понятия величины понятию числа и к расширению последнего до вещественного числа. В этом отношении характерно письмо Б. Кавальери, направленное им в 1622 г. своему учителю Г. Галилею: «Я хотел бы знать ваше решение того маленького сомнения, которое возникло у меня при чтении Евклида: мне кажется, что он понапрасну доказывает для чисел то, что он же сам выше доказал о величинах. Так, например, его способ находить для двух данных чисел их наибольшую общую меру тот же, что и для нахождения этой меры для двух величин, данный им в начале X книги. То же я утверждаю и относительно других теорем. Евклид доказывает те или иные положения о величинах, по моему мнению, он тем самым доказал их и о числе, так как и число есть величина, и я не знаю, на каком основании эти доказательства надо считать верными только для непрерывных величин, а не для дискретных. Быть может, можно утверждать, что числа подчиняются другим принципам, нежели непрерывные величины, и поэтому и т. д. Однако же мне кажется, что принцип величины, как таковой, общ и для непрерывной и для дискретной величин. Возможно, впрочем, что я заблуж-

[1] О вкладе среднеазиатских ученых в развитие понятия числа подробнее сказано в гл. 5, § 4.

даюсь и что под величиной подразумеваются только всякого рода непрерывные величины и что «величина» и «непрерывное количество» — одно и то же. Одним словом, я уповаю на вашу доброту, что вы выведете меня из заблуждения, в которое я мог бы впасть»[1].

Итак, Кавальери решительно высказывается за объединение раздельных теорий о числах и о непрерывных величинах в одну общую теорию. В деле сближения евдоксовой общей теории отношений с учением о числе, геометрии — с арифметикой, непрерывного — с дискретным огромную роль сыграла «Геометрия» Декарта, выросшая из его концепции «универсальной математики», к которой следовало бы, по его мнению, отнести не только арифметику и геометрию, но и астрономию, механику, оптику, музыку. Декарт писал: «К области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера и совершенно не существенно будут ли это числа, фигуры, звезды, звуки или что-нибудь другое»[2]. В своей аналитической геометрии Декарт изучает различные кривые как линии, получаемые движением точек: последние же определяются координатами — числами, выступающими в роли переменных величин.

Для ликвидации разрыва между понятием непрерывной величины и понятием числа Декарт выражает *любую* величину отрезком прямой, обозначаемой буквой, скажем a. Но в отличие от установок «геометрической алгебры» a^2, a^3,... тоже представляют собой *отрезки*. Вводя единичный отрезок, он каждому арифметическому действию над числами ставит в соответствие геометрическую операцию (построение) с отрезками. В частности, произведение c двух отрезков a, b он находит путем построения четвертого пропорционального к трем данным: a, b, 1 ($1 : b = a : c$). Так же находится и частное d двух отрезков: a, b ($a : b = d : 1$). Извлечению корня соответствует построение одной или нескольких средних пропорциональных между данными и единичными отрезками; например, если дан отрезок a, то способ построения отрезка $x = \sqrt{a}$ находим из пропорции $1 : x = x : a$, в которой x является средним пропорциональным. Таким образом, рассматривая каждое вещественное число как отрезок, вводя отрезок — единицу исчисления отрезков и давая наглядную интерпретацию отрицательных чисел, Декарт фактически заполнил разрыв между понятиями числа и геометрической величины и открыл путь к полному признанию как иррациональных, так и отрицательных чисел, к обобщению понятия числа и к новому его определению.

Новое определение числа было сформулировано Ньютоном во «Всеобщей арифметике» (1707): «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за еди-

---

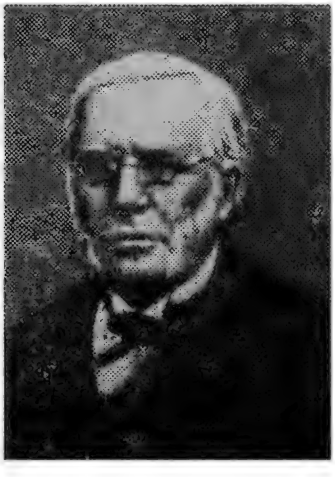
[1] См.: Кавальери Б. Геометрия / Пер. и коммент. С. Я. Лурье. М. — Л., 1940, с. 31—32.

[2] Декарт. Правила для руководства ума. М., 1936, с. 68.

ницу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное»[1].

Такого определения действительного числа, позволяющего изучать непрерывные величины не посредством декартового исчисления отрезков, а с помощью непосредственных арифметических вычислений, требовало создаваемое дифференциальное и интегральное исчисление, в основе которого лежат идеи движения и изменения, а также, в частности, тесная связь геометрии с арифметикой.

Отметим здесь, что введение Валлисом и Ньютоном понятия предела открыло путь к пониманию иррациональных чисел и как пределов последовательностей рациональных чисел. О том, что можно использовать бесконечные десятичные дроби как алгоритм неограниченного приближения любого действительного числа, писал еще в конце XVI в. С. Стевин. В XVIII в. Эйлер и Ламберт доказали, что если бесконечная десятичная дробь является периодической, то она представляет рациональное число, что привело к отождествлению непериодической бесконечной десятичной дроби с иррациональным числом. Таким образом, к началу XVIII в. вошедшие во всеобщее употребление иррациональные числа определились одними, в основном приверженцами старых традиций, лишь как неизвлекаемые точно корни рациональных чисел, другими — как последовательности рациональных приближений с любой степенью точности, наконец, третьи пользовались определением Ньютона. Определение Ньютона, занимавшее господствующее место в науке на протяжении полутора веков, не могло, однако, служить основой для строгого логического обоснования теории действительных чисел, поскольку само понятие непрерывных величин, отношение которых Ньютон назвал числом, не только не было строго определено, но и было далеко не ясным, расплывчатым, смутным.



Р. Дедекинд

Дальнейшее развитие и обоснование понятие действительного числа могло получить лишь в XIX в., после того как Больцано, Коши и Вейерштрасс дали строгое определение предела и других основных понятий математического анализа. Усилившаяся во второй половине XIX в. тенденция к полной арифметизации анализа остро поставила вопрос о строгом определении непрерывности и действительного числа.

Первое такое определение и было изложено немецким математиком Рихардом Дедекиндом (1831—1916) в работе «Непрерывность и

[1] См.: Ньютон И. Всеобщая арифметика. М., 1948, с. 8.

иррациональные числа», опубликованной в 1872 г. Она содержит всего 21 страницу, но вошла в историю математики как одно из классических произведений этой науки.

Вот что пишет Дедекинд в предисловии к этой работе: «Рассуждения, составляющие предмет этого маленького сочинения, относятся к осени 1858 г. Тогда я в качестве профессора Союзного политехникума в Цюрихе в первый раз по своему положению обязан был излагать элементы дифференциального исчисления и при этом чувствовал живее, чем когда-либо, недостаток в действительно научном обосновании арифметики. При изложении понятия о приближении переменной величины к постоянному пределу и именно при доказательстве того положения, что величина, которая возрастает постоянно, но не сверх всяких границ, должна приближаться к некоторому пределу, я прибегал к геометрической наглядности. Да и теперь я из дидактических оснований считаю такое привлечение геометрической наглядности при первом обучении дифференциальному исчислению необычайно полезным, даже неизбежным, если не хотят потратить слишком много времени. Но никто не станет отрицать того, что этот способ введения в изучение дифференциального исчисления не может иметь никакого притязания на научность.

Во мне тогда это чувство неудовлетворенности преобладало в такой степени, что я принял твердое решение думать до тех пор, пока не найду чисто арифметического и вполне строгого основания для начал анализа бесконечных. Говорят часто, что дифференциальное исчисление занимается непрерывными величинами, однако же нигде не дают определения этой непрерывности и даже при самом строгом изложении дифференциального исчисления доказательства не основывают на непрерывности, а апеллируют более или менее сознательно либо к геометрическим представлениям, либо к представлениям, которые берут свое начало в геометрии, либо, наконец, основывают доказательства на положениях, которые сами никогда не были доказаны чисто арифметическим путем. Сюда относится, например, и вышеупомянутое положение; более точное изыскание убедило меня в том, что это или всякое другое эквивалентное ему предложение может до известной степени рассматриваться как достаточный фундамент для анализа бесконечных. Все сводится только к тому, чтобы открыть настоящее начало этого положения в элементах арифметики и вместе с этим приобрести действительное определение существа непрерывности. Это удалось мне 24 ноября 1858 года...»[1]. Автор исходит из следующих трех с в о й с т в множества R рациональных чисел.

I. Если $a > b$, $b > c$, то $a > c$. Это так называемое свойство *упорядоченности*, при котором предполагается также, что для

---

[1] См.: Д е д е к и н д Р. Непрерывность и иррациональные числа / Пер С. О. Шатуновского. Одесса, 1914, с. 6—7.

любых двух элементов (чисел) имеет место одно и только одно из трех соотношений.

II. Если a, c — два различных числа, то существует бесконечное множество чисел, лежащих между a и c.

III. Если a есть какое-либо число, то оно разбивает все числа множества R на два класса (подмножества) K_1 и K_2 так, что: 1) каждое число множества R принадлежит одному и только одному из классов K_1, K_2; 2) ни один из классов K_1, K_2 не является пустым, т. е. каждый из них содержит по крайней мере по одному числу, и 3) каждое число одного, скажем первого, класса меньше любого числа второго класса. Само число a может быть отнесено либо к первому классу, и тогда оно является последним, наибольшим в этом классе, либо ко второму классу; в этом классе число a будет первым, наименьшим. Итак, a «замыкает» один и только один из классов. Такое разбиение (разделение) множества чисел на два класса называется сечением (Дедекинда). Число a, производящее это сечение, называют иногда «замыкающим» или «числом Дедекинда». Итак, третье свойство можно коротко сформулировать следующим образом: любое число множества R производит на этом множестве сечение Дедекинда.

Сравнивая множество R рациональных чисел с множеством точек прямой L, Дедекинд констатирует, что и последнее обладает теми же с в о й с т в а м и.

I. *Если точка A предшествует точке B, а точка B предшествует точке C, то и A предшествует C (или, что то же, если B следует за A, C — за B, то C следует за A).*

II. *Если A, C — две различные точки, то существует бесконечное множество точек, лежащих между A и C.*

III. *Любая точка D (названная «точкой Дедекинда») прямой разбивает все точки последней на два класса, удовлетворяющие перечисленным в пункте трем условиям, т. е. производит дедекиндово сечение.*

Установим, что любому рациональному числу можно поставить в соответствие одну определенную точку прямой и что такое соответствие не является взаимно однозначным, поскольку на прямой имеется бесконечное множество точек, которые не соответствуют никаким рациональным числам, Дедекинд констатирует необходимость создать новые числа, таким образом, чтобы «область чисел приобрела ту же полноту, или, скажем прямо, ту же непрерывность, как и прямая линия». При этом, однако, Дедекинд считает ненаучным определение иррационального числа как результата измерения (отношения) одной геометрической (непрерывной) величины другою, с ней однородной. Он требует, чтобы арифметика оперировала лишь *числами*, а не геометрическими образами, хотя и признает полезность и важность связей между обеими науками. «Можно в общем, — пишет он, — согласиться с тем, что такие связи с неарифметическими представлениями дали ближайший повод к расширению понятия о числе (хотя это решительно не име-

ло места при введении комплексных чисел); но это, безусловно, не может служить достаточным основанием для того, чтобы ввести в арифметику, науку о числах, эти чуждые ей соображения»[1]. Дедекинд считает, что, подобно тому как рациональные числа определяются посредством целых чисел, иррациональные числа должны быть определены на основе рациональных. Как же он это делает? В чем состоит непрерывность прямой?

Выше было обращено внимание на свойство III: каждая точка D прямой производит сечение, удовлетворяющее 1, 2 и 3-му условиям. Сущность непрерывности прямой Дедекинд усматривает в обратном принципе: если все точки прямой разбить на два класса, удовлетворяющие 1, 2 и 3-му условиям, то существует одна и только одна точка D, производящая это сечение, «замыкающая» один из классов, т. е. являющаяся либо последней в первом, либо первой во втором классе. В этом и заключается *аксиома непрерывности Дедекинда*. Отметим, между прочим, что в понятии непрерывности Дедекинда содержится идея о прямой как об актуально бесконечном множестве точек. В отличие от множества точек прямой множество R рациональных чисел не допускает абсолютной обратимости свойства III, т. е. не для всякого дедекиндова сечения, произведенного на множестве R, существует «замыкающее» число. Например, разделим все числа R на два класса так, что к одному отнесем все числа, квадрат которых меньше числа 2, ко второму — все числа, квадрат которых больше числа 2. Легко проверить, что речь идет о сечении Дедекинда, поскольку удовлетворены все условия аксиомы Дедекинда. Однако «замыкающего» числа среди чисел R не существует, так как в первом классе нет наибольшего, во втором нет наименьшего рационального числа. Значит, это множество не обладает свойством непрерывности, оно имеет разрывы, изъяны; оно прерывно, дискретно.

После этого путь введения новых чисел вполне ясен: всякий раз, когда нам дано сечение (K_1, K_2), которое не может быть произведено никаким рациональным числом, «мы *создаем* новое *иррациональное* число α», которое рассматривается нами как «замыкающее» и, значит, вполне определено данным сечением (K_1, K_2). Вместе с рациональными числами иррациональные образуют множество вещественных чисел, или континуум (от латинского continuum — непрерывное). Далее идет *упорядочение* континуума, т. е. определяется, при каких условиях данное вещественное число α меньше, равно или больше другого вещественного числа β, и доказательство плотности и непрерывности множества вещественных чисел. Наконец, определяются действия над действительными числами таким образом, чтобы они обладали всеми теми свойствами, которыми обладают рациональные числа, т. е. соблюдался бы принцип перманентности. В заключение Дедекинд иллюстрирует на

---

[1] См.: Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа / Пер. С. О. Шатуновского. Одесса, 1914, с. 13.

нескольких примерах связь между принципом непрерывности и анализом бесконечных.

Почти одновременно с теорией Дедекинда были построены и другие теории вещественных чисел, в том числе теория Кантора и теория Вейерштрасса. Эти теории также исходят из множества рациональных чисел, и все они мало отличаются[1] одна от другой.

В заключение отметим, что лишь после построения Дедекиндом вещественных чисел как сечений, произведенных на множестве рациональных чисел, было констатировано сходство теории Дедекинда с общей теорией отношений Евдокса. Действительно, пусть дана пара непрерывных величин A, B. Разобьем все пары целых чисел (m, n) на два класса K_1, K_2 так, что

$$\begin{aligned} (m,\ n) &\in K_1, \text{ если } mA < nB, \\ (m,\ n) &\in K_2, \text{ если } mA \geqslant nB. \end{aligned} \tag{1}$$

Это разбиение является сечением Дедекинда, поскольку: 1) каждая пара (m, n) принадлежит к одному и только к одному из классов, что следует из определения (I); 2) классы непусты. Действительно, взяв произвольное целое число m, можно по аксиоме Евдокса — Архимеда найти такое число m, чтобы $mA > nB$, и тогда пара (m, n) будет принадлежать второму классу. Аналогично доказывается существование пары, принадлежащей первому классу; 3) пусть пара (m_1, n_1) принадлежит классу K_1, пара же (m_2, n_2) — классу K_2, тогда по определению (I) будем иметь:

$$m_1 A < n_1 B,$$

$$m_2 A > n_2 B,$$

или

$$m_1 A < n_1 B,$$

$$n_2 B < m_2 A,$$

откуда

$$m_1 n_2 AB < n_1 m_2 AB,$$

или

$$m_1 n_2 < n_1 m_2. \tag{2}$$

Рассматривая пару целых чисел (m, n) как рациональное число $\frac{m}{n}$, неравенство (2) целесообразно представить так:

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2},$$

т. е. любая пара первого класса меньше любой пары второго класса. По определению Евдокса, два отношения $(A : B)$ и $(C : D)$ считаются равными, если при $mA < nB$ имеет место и $mC < nD$ и т. д.,

---

[1] Подробнее см.: Маркушевич А. И. Действительные числа и основные принципы теории пределов. М., Изд-во АПН РСФСР, 1948.

т. е. если сечение (K_1, K_2), определяемое отношением величин $(A : B)$, совпадает с сечением (K_1', K_2'), соответствующим отношению величин $(C : D)$.

Из вышеизложенного вытекает глубокая аналогия, существующая между теорией отношений Евдокса и теорией действительных чисел Дедекинда. При этом следует, конечно, учесть и различия, вытекающие из того, что Дедекинд исходил из уже построенной арифметики рациональных чисел. Когда один из современников последнего — видный немецкий математик Рихард Липшиц обратился к Дедекинду с вопросом, что нового имеется в его теории по сравнению с теорией Евдокса, он получил следующий ответ: *аксиома непрерывности*. Действительно, в теории отношений Евдокса говорится лишь о выше сформулированном свойстве III, но не о его обратимости, т. е. если задано отношение (действительное число) $A : B$, то оно определяет сечение. Из теории Евдокса, однако, не следует, что всякое сечение определяет одно отношение $A : B$, но ведь в последнем и заключается суть непрерывности.

§ 8. ИЗ ИСТОРИИ АЛГЕБРЫ В XVI в.

В Европе в XVI в. было положено начало оригинального развития математики и перехода от старого к новому этапу развития этой науки (рис. 44). Важнейшими математическими достижения-

Рис. 44. Математики XVI в.

ми XVI в. были алгебраическое решение уравнений третьей и четвертой степени и создание алгебраической символики.

Новый этап развития алгебры зародился в Италии. В начале XVI в. профессор математики Болонского университета Сципион дель-Ферро (1465—1526) впервые нашел алгебраическое решение уравнения третьей степени вида

$$x^3 + px = q, \qquad (1)$$

где p, q — числа положительные. Это решение профессор держал в строгом секрете, о нем узнали только два ученика ученого, в том числе некий Фиоре. Утаивание научных открытий в то время имело особое значение для жизни и карьеры их авторов. В Италии широко практиковались тогда математические поединки-диспуты: на многолюдных собраниях оба противника предлагали один другому задачи для решения их на месте или в определенный срок. Побеждал тот, кто решал большее количество задач. Победитель награждался при этом не только славой и назначенным денежным призом, но и возможностью занять университетскую кафедру или другую должность. А человек, потерпевший на диспуте поражение, часто терял занимаемое им место. В диспутах XVI в. первое место занимала алгебра, названная «Великим искусством», в отличие от арифметики, которую называли «Малым искусством». Диспуты проходили в городе Болонья, который славился своим университетом. В этом высшем учебном заведении работали многие ученые с мировым именем, в том числе Лука Пачоли, Николай Коперник, а позже Галилео Галилей и др.

Для участников алгебраических диспутов было исключительно важно обладать неизвестной еще для других формулой решения того или иного типа уравнений, алгоритмом, с помощью которого можно было решить значительное количество задач. Вот почему после внезапной смерти дель Ферро его ученик Фиоре, который сам не был глубоким математиком, решил воспользоваться сообщенным ему секретом и вызвать на публичный диспут одного из виднейших математиков того времени — Николо Тарталья (ок. 1499—1557).

Н. Тарталья

Настоящая фамилия ученого была не Тарталья, а Фонтана. В 1512 г. его родной город Брешия был оккупирован французскими войсками. В то время озверевшие солдаты беспощадно грабили и даже убивали мирных жителей. Маленький Николо тоже был тяжело ранен: у

него был рассечен язык. Матери удалось спасти жизнь сына, но говорить свободно Николо уже никогда не мог, речь его была крайне невнятной. Он получил прозвище Тарталья (заика). Несмотря на тяжелые материальные условия, одаренный мальчик упорно овладевал математикой. Нередко, когда не было денег на покупку бумаги, он писал свои вычисления на заборах, камнях.

Ко времени вызова на поединок со стороны Фиоре (1535) Тарталья уже занимал кафедру математики в Вероне и славился как первоклассный ученый. Одной из самых актуальных и жгучих проблем того времени было алгебраическое решение («решение в радикалах») кубических уравнений, т. е. нахождение общей формулы, выражающей корни любого уравнения третьей степени в зависимости от коэффициентов при помощи конечного числа алгебраических операций — сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корней. Такая формула была давно известна для уравнения второй степени, а поэтому было естественно искать ее и для уравнения третьей степени, тем более что ученые мира до того времени такой формулы найти не могли.

Получив вызов на диспут, Тарталья понял, что Фиоре обладает формулой для решения уравнений вида (1).

При подготовке к диспуту Тарталья все свое внимание сосредоточил на поисках алгебраического решения кубических уравнений, работая днем и ночью над этой проблемой. Его труды не были тщетными. Вот как позже писал он об этом: «Я приложил все свое рвение, усердие и уменье, чтобы найти правило для решения кубических уравнений, и, благодаря благосклонной судьбе, мне удалось это сделать за 8 дней до срока».

Диспут состоялся 20 февраля 1535 г. Тарталья в течение двух часов решил 30 задач, предложенных ему противником. Фиоре, который не смог решить ни одной из 30 предложенных ему задач, выбранных Тартальей из различных областей математики, признал себя побежденным. После диспута Тарталья стал знаменитым во всей Италии, однако он продолжал держать в секрете найденную им формулу, так как намеревался опубликовать ее в своем труде по алгебре.

Дж Кардано

Другой видный итальянский ученый, Джероламо Кардано (1501—1576), который искал, но не мог найти алгоритма для решения кубических уравнений, обратился в 1539 г. к Тарталье с просьбой сообщить ему соответствующую формулу. После то-

го как Кардано дал «священную клятву» в том, что он никому не раскроет тайну, Тарталья согласился открыть ему секрет. Однако в своем сообщении в стихах Тарталья лишь частично раскрыл свою тайну и сознательно маскировал полное решение кубического уравнения. Между тем в 1542 г. Кардано познакомился в Болонье с рукописями покойного профессора дель-Ферро и получил полную ясность в этом вопросе. В 1545 г. Кардано опубликовал знаменитый свой труд «О великом искусстве, или об алгебраических вещах, в одной книге». В этом труде впервые было опубликовано алгебраическое решение уравнений третьей степени. В современной записи соответствующая формула, выражающая корни кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$ (к которому можно свести общее уравнение третьей степени) через его коэффициенты, имеет следующий вид:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \qquad (2)$$

В книге Кардано содержится также алгебраическое решение уравнений четвертой степени — важнейшее открытие, сделанное одним из его учеников — Луиджи Феррари (1522—1565).

После выхода в свет книги Кардано последний был обвинен Тартальей в нарушении данного им обещания и клятвы. «У меня, — писал Тарталья, — вероломно похитили лучшее украшение моего собственного труда по алгебре». Последовала острая и продолжительная полемика между обоими математиками и между их сторонниками.

Таковы обстоятельства, при которых были открыты общие формулы для решения уравнений третьей и четвертой степени. Формула (2) поныне называется «формулой Кардано», несмотря на то что ее следовало бы назвать по крайней мере так: «Формула Ферро — Тарталья — Кардано».

Тарталья написал несколько книг, самая важная из которых была издана в Венеции в 1556 г. под названием «Общее исследование чисел и мер». В ней впервые применяются круглые скобки. Она содержит также таблицу так называемых «биномиальных коэффициентов», получаемых при возведении в 1, 2, 3, ..., n степень двучлена (бинома) $a + b$, например:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

соответствующие биноминальные коэффициенты: 1, 2, 1;

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

биноминальные коэффициенты: 1, 3, 3, 1 и т. д. Эти коэффициенты

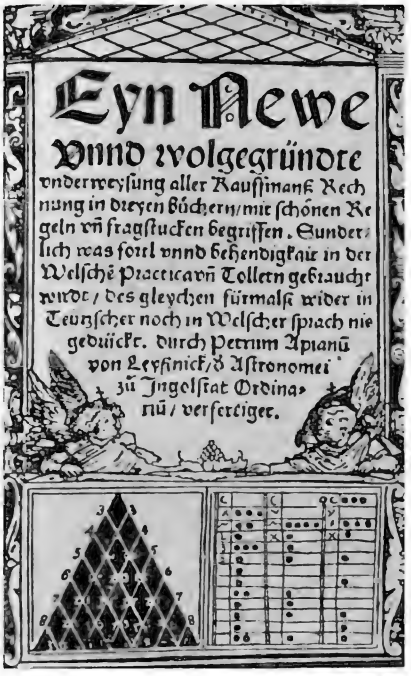


Рис. 45. Треугольник Паскаля напечатан впервые в 1527 г. в книге П. Апиана за 100 лет до рождения Паскаля

Рис. 46. «Арифметический треугольник» в Японии. Из книги 1781 г.

издавна располагались в виде треугольной числовой таблицы, названной «арифметическим треугольником», следующего вида:

Таблица 2

								1														
							1		1													
						1		2		1												
					1		3		3		1											
				1		4		6		4		1										
			1		5		10		10		5		1									
		1		6		15		20		15		6		1								

Эта таблица была частично известна в Индии еще во II в. до н. э. До $n = 8$ она приводится впервые в трактате «Зеркало четырех элементов» китайского математика Чжу Ши-цзе (XIII — XIV вв.), а для $n = 9$ — у ал-Каши. В Европе она фигурирует в трудах П. Апиана (1527) и Штифеля (1544). Большую известность таблица получила в XVII в. в связи с работами Б. Паскаля, почему иногда и называется «треугольником Паскаля» (рис. 45, 46).

Вот некоторые из свойств арифметического треугольника, которые указаны в книге Тартальи[1]: по боковым сторонам треугольника стоят единицы; числа, симметричные относительно «высоты», т. е. вертикального столбца (1, 2, 6, ...), равны между собой; каждое число внутри треугольника образуется сложением двух стоящих над ним (справа и слева) чисел.

По указанной схеме можно построить аналогичные треугольники. Умножая, например, строки арифметического треугольника на последовательные степени числа 2, т. е. на 2^1, 2^2, 2^3, ..., получаем следующий треугольник:

Таблица 3.

						1								
					2		2							
				4		8		4						
			8		24		24		8					
		16		64		96		64		16				
32			160		320		320		160			32		

В этом треугольнике в первой строке тоже стоит единица и числа, симметричные относительно «высоты», равны. Но в нем первое и последнее числа каждой строки равны не единице, а последовательно степеням 2, т. е. 2, 4, 8, ... Каждое число внутри треугольника равно произведению числа 2 на сумму двух чисел, стоящих над ним (справа и слева), например: $64 = 2(24 + 8)$ и т. п.

Открытие в XVI в. алгебраического решения уравнений третьей и четвертой степени означало большой шаг вперед в деле развития алгебры и поставило перед наукой новые проблемы. Не меньшее значение имело создание алгебраической символики, в котором принимали участие многие математики.

Еще во второй половине XV в. некоторые европейские ученые (Регномонтан, Пачоли, Шюке, Видман и др.), вводя алгебраические знаки, создали начала алгебраического исчисления. В XVI в. буквенная символика развивается и совершенствуется благодаря трудам немецких, английских, нидерландских и французских математиков.

Виднейшим немецким математиком XVI в. был Михаил Штифель. Он поступил в молодости в один из католических монастырей, затем примкнул к протестантскому движению, возглавляемому Лютером, и стал сельским пастором (священником). Одно время Штифель предался мистическим толкованиям по поводу чисел, встречающихся в Библии, с целью предсказать дату «конца света». В Библии говорится, что настанет якобы день, когда «Солнце померкнет и Луна не даст света своего и звезды падут с неба». Ссылаясь на это антинаучное утверждение, разные религиозные лжеученые неоднократно предсказывали «конец мира». Это событие намечалось на 992, 1000, 1198 и другие годы. Для нахождения

[1] Сама таблица у Тартальи имеет несколько иной вид.

Der Ander theyl

Von diſen zweyen zeichen/ + vnd —. VII.

O ich von zeychen reden werde/ſoltu mich verſtehn von diſen zeichen + vnd — /Deñ ſolliche verzeichnis/ Sum: oder Sum: A. oder ſ. ä. Werde ich nicht zeychen nennen/ſondern/namen/oder benennung der zalen. Wa ich nu rede von gleichen zeichē/ ſoltu es verſtehn von + vnd + /oder von — vnd —. Alſo auch/wa ich von vngleichen zeichen rede/ſo verſtehe es/von + vnd —.

Рис. 47. Примеры сложения положительных и отрицательных чисел из «Арифметики» 1545 г. М. Штифеля

искомый даты Штифель заменял числа из Библии словами,буквы которых должны были соответствовать треугольным числам и т. д. На основе таких «исследований» Штифель имел неосторожность публично предсказать конец мира на 19 октября 1533 г. Это предсказание пастора привело к настоящей панике в среде его прихожан и других религиозных и суеверных людей. Многие стали ликвидировать все свои коммерческие предприятия, раздавая и уничтожая деньги и вещи, растаскивая с трудом созданное хозяйство. Но когда «фатальная» дата прошла без всякой катастрофы, обманутые люди яростно набросились на своего пастора и надолго заключили его в Вюртембургскую тюрьму. Только благодаря стараниям самого Лютера Штифель был снова выпущен на свободу.

Случившееся оказало значительное влияние на дальнейшую жизнь и деятельность Штифеля: он решительно освободился от религиозного дурмана, занялся настоящей математикой и работал в этой области с большим успехом. В 1554 г. появился важнейший его труд — «Полная арифметика», а через год — «Немецкая арифметика» (рис: 47). В 1533 г. он издал дополненную им «Алгебру» Рудольфа под названием «Косс». Штифель, будучи самоучкой, тем не менее был в курсе всех математических достижений своего времени. В одно из своих произведений он даже включил найденное в те годы итальянцами алгебраическое решение уравнений третьей и четвертой степени. Он справедливо считается одним из предшественников Непера, изобретателя логарифмов. Штифель первым из математиков рассматривал отрицательные числа как числа, меньшие нуля, и один из первых ввел знак корня с целым показателем, круглые скобки и символы для многих неизвестных.

В результате сокращения слов и изобретения знаков в то время произошли и другие сдвиги в символике, в частности в 1557 г. Рекорд вводит современный знак равенства.

Важнейший вклад в дело разработки алгебраической символики был сделан в конце XVI в. Виетом. По своему образованию и по профессии Виет был юристом. Изучив еще в молодости коперникову систему мира, Виет заинтересовался астрономией и задумал написать большой трактат. Эта работа побудила его к занятиям тригонометрией и алгеброй. Астрономический трактат, над которым Виет работал в продолжение всей жизни, так и не был доведен до конца, а его алгебраические исследования, которые он предпринял для изучения астрономии, привели к важнейшим результатам и проложили новый путь в развитии алгебры.

Виет был не только одаренным математиком, но и обладал большой трудоспособностью. Он постоянно был загружен адвокатской деятельностью и вместе с этим успевал заниматься трудоемкой и глубокой математической работой. В 1579 г. появилась его работа по тригонометрии — «Математические таблицы», а в 1591 г. — знаменитое произведение «Введение в аналитическое искусство», в котором впервые были введены буквенные обозначения для неизвестных и для коэффициентов уравнений. Пользуясь алгебраической символикой, Виет установил единообразный прием решения уравнений, выражая зависимость между корнями и коэффициентами уравнений и другие результаты общими формулами. Символика Виета еще далека от современного вида. В этом можно убедиться из следующего примера, взятого из произведений Виета:

1) $\dfrac{Din \left[\begin{matrix} B\ cubum\ 2 \\ -D\ cubo \end{matrix}\right.}{\begin{matrix} B\ cubo \\ +D\ cubo \end{matrix}}$ вместо $\dfrac{D \cdot (2B^3 - D^3)}{B^3 + D^3}$.

В XVII в. совершенствование символики было продолжено трудами Гарриота, Оутреда, Ньютона и других ученых. На протяжении XVI — XVII вв. для одного и того же понятия разные ученые применяли разные знаки, с другой стороны, один и тот же символ применялся в разном смысле разными математиками. Например, знак = означал у Рекорда «равно», Виет его применял как знак вычитания (минус), Декарт же пользовался им вместо нашего $\pm$; знак ∞ был для Декарта знаком равенства, для Валлиса же — знаком бесконечности и т. п. Лишь в XVIII в. повсюду утверждается современная алгебраическая символика.

§ 9. ЖЕНЩИНЫ-МАТЕМАТИКИ

Мало было в прошлом ученых-женщин, еще меньше — женщин-математиков[1]. Первая женщина-математик, согласно дошедшим до нас сведениям, была гречанка *Гипатия*, жившая в Александрии от 370 до 415 года. Отец ее, Теон Александрийский, из-

[1] См.: Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. М., 1946, с. 143—154.

вестен тем, что написал книгу об астролябии, комментарий (т. е. пояснительные примечания) к астрономическому трактату «Алмагест» знаменитого ученого древности Птолемея (II в.) и заново издал «Начала» Евклида с пояснениями и добавлениями.

Гипатия изучала математику, астрономию, медицину и философию, написала комментарии к «Арифметике» Диафанта и к «Коническим сечениям» Апполония Пергского. Она была красива, красноречива, обаятельна; ее мнение и советы не только в области науки и литературы, но и в практической жизни ценились всеми. Среди ее знакомых и друзей было много христиан, однако сама она была язычницей и оставалась верной традициям своих предков. Однажды, когда Гипатия возвращалась домой, толпа фанатиков-христиан, подстрекаемых александрийским епископом, потащила ее к церкви и убила, забрасывая камнями. Затем ее тело было разорвано на куски и сожжено. В истории многих веков после смерти Гипатии не сохранилось никаких сведений об ученых-женщинах.

В XVI — XVIII вв. выделяются своим образованием несколько женщин, учителями которых были знаменитые математики: Виет, Декарт, Эйлер. Последний так и назвал одну из своих книг: «Письма к принцессе».

В первой половине XVIII в. во Франции славилась своей образованностью маркиза *Эмилия дю Шатлэ*, которая перевела с латинского на родной язык знаменитое произведение Ньютона «Математические начала натуральной философии». Это грандиозный труд, в котором изложены учение о всемирном тяготении и принципы классической механики. Перевод Эмилии Шатлэ одобрил и дополнил комментарием известный французский математик А. Клеро. Ученость Шатлэ прославил в одном из своих стихотворений знаменитый писатель и деятель французского просвещения Вольтер.

Другая французская женщина XVIII в., *Мария Лаланд*, совместно со своим братом и мужем составила тригонометрические таблицы, известные под названием «Таблицы Лаланд». Как способная вычислительница была известна также француженка *Гортензия Лепот*. Отметим, что ее именем был назван декоративный цветок, привезенный ею из Индии.

Более яркими математическими способностями и эрудицией обладала итальянка *Мария Гаетана Аньези* (1718—1799), которая была первой в мире женщиной, занимавшей должность профессора математики в университете, а именно в старейшем Болонском университете, основанном в XI в. Она написала «Курс анализа для употребления итальянского юношества», в котором даны оригинальные доказательства многих теорем, а также геометрический трактат. В ее честь одна из кривых линий, ею исследованных, поныне называется «кривой Аньези»[1].

[1] См., например: Савелов А. А. Плоские кривые. М., 1960, с. 89.

Англичанка *Мэри Сомервиль* (1780—1872) вела переписку с выдающимися учеными, среди которых были Гей-Люссак, Лаплас, Араго и др. Она написала несколько книг по астрономии и физике и перевела на родной язык знаменитое произведение Лапласа «Небесная механика». Ее ученица, *Ада Байрон* (1815—1852), единственная дочь известного английского поэта Дж. Байрона, творчество которого так любили Пушкин, Лермонтов и Белинский, тоже занималась математикой, и в частности математическими машинами.

Глубоким творческим талантом обладала француженка *Софья Жермен* (1776—1831). Так как родители не разрешали ей заниматься математикой, которой она увлекалась с детства, Софья писала свои выкладки тайком, по ночам под одеялом...

Однажды, в начале XIX в., она написала всемирно известному немецкому математику К. Ф. Гауссу письмо, в котором содержалась просьба разъяснить некоторые недоумения, возникшие в ходе ее математических исследований. Письмо она подписала мужским именем, так как опасалась, что знаменитый ученый не станет уделять внимание женщине, занимающейся математикой. Гаусс оценил по достоинству своего талантливого незнакомого корреспондента и выразил желание узнать его лично. Случай для этого представился в 1807 г., когда французские войска заняли немецкий город Геттинген, в котором жил Гаусс. Софья просила генерала, командовавшего французскими оккупационными войсками, пощадить жизнь Гаусса, дабы его не постигла трагическая судьба великого Архимеда из Сиракуз. Узнав об этом, Гаусс был глубоко тронут всем происшедшим и до конца жизни хранил глубокое уважение и дружбу к Жермен.

Одним из других почитателей таланта Софьи Жермен был выдающийся французский математик Ж. Л. Лагранж (1736—1813), автор классического труда «Аналитическая механика». За исследования по теории упругости С. Жермен была присуждена в 1816 г. премия Парижской академии наук. Она отличилась также в области геометрии и теории чисел.

Приведем одну из предложенных Софьей Жермен задач.

З а д а ч а **39**. «Доказать, что при $a \neq 1$, каждое число вида $a^4 + 4$ является составным».

Для доказательства представим $a^4 + 4$ в виде произведения двух множителей с помощью следующих преобразований:

$$a^4 + 4 = (a^4 + 4 + 4a^2) - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 =$$

$$= (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a).$$

Ни один из полученных двух множителей не равен самому $a^4 + 4$ и не может быть равным единице, потому что

$$a^2 + 2 - 2a = (a - 1)^2 + 1^2,$$

сумма же эта не может равняться единице.

* *
*

С. Ковалевская 18 лет

Выдающейся женщиной-математиком была *Софья Васильевна Ковалевская*. Она родилась в Москве 15 января 1850 года в семье артиллерийского генерала В. Корвин-Круковского. С раннего детства Софья пристрастилась к чтению литературы и научных книг. Математические ее способности проявились впервые в возрасте 13 лет.

Был у Софьи дядя, Петр Васильевич, которому она посвятила одну главу из «Воспоминаний детства»[1], написанных ею в зрелом возрасте.

«Хотя он математике никогда не обучался, — пишет Ковалевская, — он питал к этой науке глубочайшее уважение. Из разных книг набрался он кое-каких математических сведений и любил пофилософствовать по их поводу, причем ему часто случалось размышлять вслух, в моем присутствии. От него услышала я, например, в первый раз о квадратуре круга[2], об асимптотах (прямых линиях), к которым кривая постоянно приближается, никогда их не достигая, о многих других вещах подобного рода, смысла которых я, разумеется, понять еще не могла, но которые действовали на мою фантазию, внушая мне благоговение к математике, как науке высшей и таинственной, открывающей перед посвященными в нее новый чудесный мир, недоступный простым смертным.

Говоря об этих первых моих соприкосновениях с областью математики, я не могу не упомянуть об одном очень курьезном обстоятельстве, тоже возбудившем во мне интерес к этой науке. Когда мы переезжали на житье в деревню, весь дом пришлось отделать заново и все комнаты оклеить новыми обоями. Но так как комнат было много, то на одну из наших детских комнат обоев не хватило, а выписывать-то обои приходилось из Петербурга; это было целой историей, и для одной комнаты их выписывать решительно не стоило. Все ждали случая, и в ожидании его эта обиженная комната так и простояла много лет с одной стороны оклеенная простой бумагой. Но по счастливой случайности на эту оклейку пошли именно листы литографированных лекций Остроградского о дифференциальном и интегральном исчислениях, приобретенные моим отцом в молодости.

Листы эти, испещренные странными, непонятными формулами,

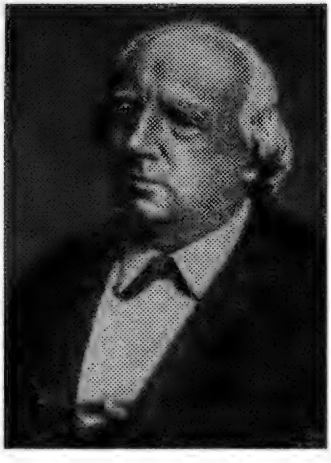
---

[1] См. Ковалевская С. В. Воспоминания и письма. М., 1961.
[2] См. гл. 6, § 17.

скоро обратили на себя мое внимание. Я помню, как я в детстве проводила целые часы перед этой таинственной стеной, пытаясь разобрать хоть отдельные фразы и найти тот порядок, в котором листы должны бы следовать друг за другом. От долгого, ежедневного созерцания внешний вид многих из формул так и врезался в моей памяти, да и самый текст оставил о себе глубокий след в мозгу, хотя в самый момент прочтения он и остался для меня непонятным.

Когда много лет спустя, уже пятнадцатилетней девочкой, я брала первый урок дифференциального исчисления у известного преподавателя математики в Петербурге, Александра Николаевича Страннолюбского, он удивился, как скоро я схватила и усвоила себе понятие о пределе и о производной, точно я наперед их знала. Я помню, он именно так и выразился. И дело, действительно, было в том, что в ту минуту, когда он объяснял мне эти понятия, мне вдруг живо припомнилось, что все это стояло на памятных мне листах Остроградского, и самое понятие о пределе показалось мне давно знакомым».

Увлечение математикой у Ковалевской было настолько сильным, что она забыла обо всем остальном. В те времена в России, и в большинстве стран Запада, женщинам не был разрешен доступ в высшие учебные заведения. Для поездки за границу требовалось, чтобы женщина была замужем. Софья в возрасте 18 лет вышла замуж за В. О. Ковалевского. С мужем Софья Васильевна уехала в Германию. С большим трудом ей удалось поступить в Гейдельбергский университет, где она слушала лекции по высшей математике, физике и другим наукам. Однако Ковалевская стремилась в Берлинский университет, одним из профессоров которого был выдающийся математик Карл Вейерштрасс. Так как и в Берлинский университет женщины доступа не имели, Софья Васильевна отправилась к Вейерштрассу на дом и просила его, чтобы он занимался с нею частным образом. Чтобы отвязаться от необычной просительницы, Вейерштрасс предложил ей решить несколько очень трудных задач. Оказалось, однако, что С. Ковалевская их быстро решила. Убедившись в исключительных способностях своей посетительницы, Вейерштрасс согласился заниматься с нею.



К. Вейерштрасс

В 1871 г. Софья Васильевна вместе со своим мужем дважды ездила в Париж, где жила и принимала активное участие в революционной деятельности ее сестра Анюта. Софья Ковалевская прожила при

Парижской коммуне с 5 апреля по 12 мая и вместе с сестрой под грохот бомб, рискуя жизнью, ухаживала за ранеными бойцами-революционерами.

В 1873 г., будучи в Париже, С. Ковалевская познакомилась с Елизаветой Федоровной Литвиновой (1845—1919). Е. Литвинова, доктор математики и философии Бернского университета, была русской женщиной, преподававшей математику в старших классах гимназии и опубликовавшей много работ по вопросам методики и истории математики[1].

После четырех лет занятий с Вейерштрассом и большой настойчивой работы С. Ковалевская смогла представить три научных труда Геттингенскому университету, который присудил ей степень доктора «с высшей похвалой».

Вернувшись в Россию, Ковалевские поселились в Петербурге. На родине Софья Ковалевская не могла применить свои знания: женщинам научная карьера была закрыта. Она вращалась в кругу ученых и писателей, среди которых были всемирно известные химики Д. И. Менделеев и А. И. Бутлеров, математик П. Л. Чебышев, физик А. Г. Столетов, естествоиспытатель И. М. Сеченов и корифеи литературы И. С. Тургенев и Ф. М. Достоевский. Так как Софья Васильевна отличалась разносторонним образованием, она занялась литературой и публицистикой, помещала в разных газетах и журналах научные обзоры, театральные рецензии и другие статьи.

В 1878 г. она родила дочь, за этим последовала длительная ее болезнь. Но и по выздоровлении С. Ковалевская достойной работы найти не могла. Царский министр просвещения, отвечая отказами на все ходатайства Софьи Васильевны, выразился при этом, что она и ее дочь «успеют состариться прежде, чем женщин будут допускать к университету».

В 1883 г. умер В. О. Ковалевский. После смерти мужа Софья Васильевна надолго уединилась, стремясь забыться в математических исследованиях.

В конце 1883 г. она по приглашению старого друга и бывшего ученика Вейерштрасса, профессора Миттаг-Леффлера, заняла должность доцента, а вскоре и профессора Стокгольмского университета. Она с большим подъемом читала лекции по различным разделам высшей математики. Многие студенты и преподаватели с любовью ее называли «наш профессор Соня».

Софья Васильевна не ограничивалась, конечно, преподавательской деятельностью. Она была одним из редакторов известного математического журнала под латинским названием «Акта математика» (математические ведомости), занималась серьезными научными исследованиями, увлекалась литературной деятельностью, писала романы, стихи, драмы (рис. 48). Для многих казалось

[1] См.: Грацианская Л. М., Литвинова Е. Ф. Математический сборник Киевского университета. 1954. № 5.

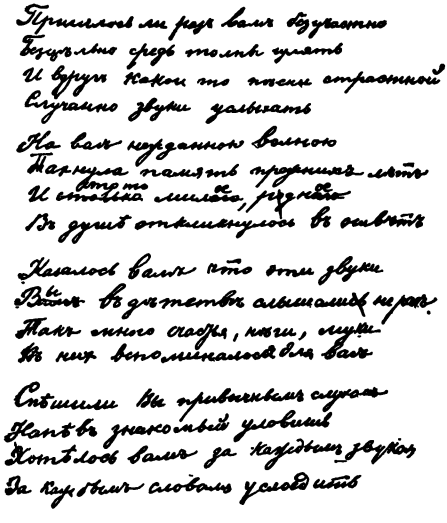


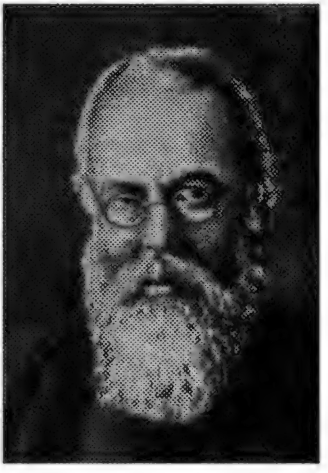
Рис. 48. Стихотворение С. Ковалевской

странным, как она сочетает математику с поэзией. По этому поводу Ковалевская писала: «Многие, которым никогда не представлялось случая более глубоко узнать математику, смешивают ее с арифметикой и считают наукой сухой. В сущности же это наука, требующая наиболее фантазии, и один из первых математиков нашего столетия говорит совершенно верно, что нельзя быть математиком, не будучи в то же время поэтом в душе. Только, разумеется, чтобы понять верность этого определения, надо отказаться от старого предрассудка, что поэт должен сочинять несуществующее, что фантазия и вымысел одно и то же. Мне кажется, что поэт должен только видеть то, что не видят другие, видеть глубже других. Что до меня касается, то я всю жизнь не могла решить: к чему у меня больше склонности, к математике или литературе? Только что устанет голова над чисто абстрактными спекуляциями, тотчас начинает тянуть к наблюдениям над жизнью, к рассказам и, наоборот, в другой раз вдруг все в жизни начнет казаться ничтожным и неинтересным, и только одни вечные, непреложные, научные законы привлекают к себе. Очень может быть, что в каждой из этих областей я сделала бы больше, если бы предалась бы ей исключительно, но тем не менее я ни от одной из них не могу отказаться совершенно».

Близкими знакомыми Софии Васильевны в Стокгольме были не только ученые, но и выдающиеся писатели, музыканты и артисты. Среди них: известный норвежский писатель Генрих Ибсен, датский литературный критик Георг Брандес, великий норвежский композитор Эдвард Григ и др.

Самой важной научной работой С. Ковалевской было полное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. За эту работу ей была присуждена в 1888 г. премия Парижской академии наук. При торжественном вручении премии знаменитый ученый Э. Дюбуа-Раймон сказал: «Софья Васильевна не только превзошла своих немногих предшественниц в математическом образовании, но заняла между современными математиками одно из самых видных мест. Она получила премию за решение вопроса о вращении твердого тела под влиянием действующих на него сил. Из трех представлявшихся здесь задач две были решены

С. В. Ковалевская



В. А. Стеклов

Лагранжем. Решение третьей задачи, самой сложной, принадлежит Ковалевской».

Через год за дополнительные исследования той же проблемы ей была присуждена премия Шведской академии наук. Результаты математических работ Ковалевской оказали большое влияние на ход научных исследований многих крупных ученых, в том числе Т. Леви-Чивита (Италия), С. А. Чаплыгина, В. А. Стеклова, А. Н. Крылова, Е. Н. Жуковского и др.

Софья Васильевна стала знаменитостью. Английский математик Дж. Сильвестр написал в ее честь сонет, в котором назвал ее «небесной музой». Благодаря стараниям великого русского математика П. Л. Чебышева Петербургская академия наук избрала Ковалевскую своим почетным членом-корреспондентом. О ней писали газеты и журналы всего мира, ее чествовали на многочисленных вечерах.

Несмотря на успехи и почести, С. Ковалевская чувствовала себя одинокой на чужбине и глубоко тосковала по Родине. Ковалевская знала французский, анлийский, немецкий и шведский языки, однако считала, что самые сокровенные свои мысли может выражать только на своем родном, на русском языке. Она всю жизнь мечтала о том, чтобы преподавать, работать у себя на родине, однако даже после ее научных успехов в царской России для нее места не нашлось. Президент Петербургской академии наук, великий князь Константин Константинович ответил на ходатайства Чебышева и других русских ученых о предоставлении Ковалевской соответствующего места следующим образом: «Так как доступ на кафедры в наших университетах совсем закрыт для женщин, каковы бы ни были их способности и познания, то для г-жи

Ковалевской в нашем отечестве нет места столь же почетного и хорошо оплачиваемого, как то, которое она занимает в Стокгольме».

В последние годы своей жизни Софья Ковалевская подружилась со шведской писательницей Эллен Кэй и вновь увлеклась литературной деятельностью, работая над повестью о великом русском революционном демократе и писателе Н. Г. Чернышевском. В конце января 1891 г. по дороге из Франции в Швецию она сильно простудилась и заболела воспалением легких, 10 февраля 1891 г. в полном расцвете творческих сил Софья Васильевна скончалась.

С разных концов Европы, в частности из России, в день похорон прибыли телеграммы, письма и цветы. В речи на похоронах один из друзей Ковалевской сказал: «Софья Васильевна! Благодаря Вашим знаниям, Вашему таланту и Вашему характеру Вы всегда были и будете славой нашей родины. Недаром оплакивает Вас вся ученая и литературная Россия. Со всех концов обширной империи, из Гельсингфорса и Тифлиса, из Харькова и Саратова, присылают венки на Вашу могилу... Вам не суждено было работать в родной стране. Но, работая по необходимости вдали от родины, Вы остались верной и преданной союзницей юной России, России мирной, справедливой и свободной, той России, которой принадлежит будущее».

О Софье Ковалевской написано немало книг и статей. Научные труды Ковалевской, которые явились важным вкладом в мировую науку и прославили русское имя, не потяряли своей ценности и в настоящее время.

Образ Софьи Ковалевской, талантливейшей женщины-математика, которая в годы темной реакции и нелепых предрассудков с необычной смелостью и настойчивостью пробивала себе дорогу к науке и свету, еще долго будет вызывать восхищение девушек, юношей и передовых людей всего мира.

После С. Ковалевской в самом начале XX в. другие две русские женщины получили в Геттингенском университете степень доктора за труды в области математики, а именно *Надежда Николаевна Гернет*, преподававшая потом в Петербурге на высших женских курсах, и *Любовь Николаевна Запольская*, работавшая на тех же курсах в Москве.

Одним из крупнейших математиков XX в. была Эмми Нетер (1882—1935), «самая крупная женщина-математик, когда-либо существовавшая»[1].

Э. Нетер родилась 23 марта 1882 г. в семье математика Макса Нетера в Эрлангене (Германия) и там же в 1907 г. защитила диссертацию. В 1916 г. Э. Нетер переезжает в г. Геттинтен, который в то время славился во всем мире как важнейший математический центр. Тут Нетер работала под влиянием великого немецкого

[1] См.: Александров П. С. Памяти Эмми Нетер. — Успехи математических наук, 1936, вып. II.

математика Давида Гильберта (1862—1943). Однако основной период научной деятельности Э. Нетер начинается примерно с 1920 г., когда она кладет начало новому направлению в алгебре. Основной ее научный путь — создание *общей, абстрактной алгебры*[1], как ее называют в настоящее время. В 1922—1923 гг. она работала профессором Геттингенского университета и была известна в мире науки как глава большой научной школы.

Э. Нетер

Э. Нетер была обаятельной личностью, общительной и доброжелательной. В числе ее друзей были ученые с мировым именем: немецкие математики Д. Гильберт, Г. Вейль, Э. Ландау, нидерландский математик Л. Брауэр, советские математики П. С. Александров, П. С. Урысон и др. Э. Нетер была большим другом Советской страны и на протяжении 10 лет жизни поддерживала тесные связи научного сотрудничества и сердечной дружбы с математиками СССР; в 1928/29 учебном году читала лекции в Московском университете.

В 1933 г., с приходом гитлеровцев к власти, Э. Нетер, как и большинство известных геттингенских математиков (Р. Курант, Г. Вейль и др.), была изгнана из университета и вынуждена была уехать за границу. Последние полтора года жизни она прожила в небольшом городке штата Пенсильвании (США), где и умерла 14 апреля 1935 г.

Труды Э. Нетер оказали большое влияние на развитие современного математического мышления. «Если, — писал академик П. С. Александров, — развитие математики сегодняшнего дня несомненно протекает под знаком алгебраизации, проникновения алгебраических понятий и алгебраических методов в самые различные математические теории, то это стало возможным лишь после работ Эмми Нетер».

В настоящее время в разных областях современной математики работает немало женщин-математиков. Среди них: в Италии — Мария Пастори (тензорный анализ), Пиа Налли (алгебраическая геометрия) и Мария Чикуини-Чебрарио (дифференциальные уравнения), во Франции — Жакелина Лелон-Ферран (теория функций комплексного переменного)

[1] Общая теория колец, полей, идеалов.

и Полетт-Либерман (комплексные многообразия), в Швейцарии — Софья Пикар (теория групп), в Англии — Ганна Нейман (теория групп), в Румынии — Вера Лебедева-Миллер (теория функций) и многие другие.

В нашей стране после Великой Октябрьской социалистической революции двери высших учебных заведений широко раскрылись перед всеми трудящимися. Женщины, получив равные с мужчинами права, получили доступ во все отрасли народного хозяйства, культуры и науки. В результате осуществления равенства в правах женщины Советского Союза работают наравне с мужчинами в академиях наук, в научных институтах, в университетах, в различных высших и средних учебных заведениях. Среди них многие прославились своими работами и открытиями в области математики. Назовем наиболее известные в науке имена.

Екатерина Алексеевна Нарышкина (1895—1940), доктор физико-математических наук, долгие годы занималась исследованиями в области теории чисел и математической физики. Заслуживают внимания работы по математике профессора Веры Иосифовны Шифф (умерла в 1918 г.).

Академик Пелагея Яковлевна Кочина-Полубаринова (р. 1899 г.) за исследования некоторых задач плоского движения грунтовых вод получила в 1964 г. Государственную премию. За фундаментальную работу в теории фильтрации, за результаты изучения дифференциальных уравнений, за исследования по истории математики и механики ей присвоено звание Героя Социалистического Труда.

Профессор, доктор физико-математических наук Нина Карловна Бари (1901—1961) внесла значительный вклад в теорию функций действительного переменного и в учение о тригонометрических рядах. Она была избрана членом Французского и Польского математических обществ.

Людмила Всеволодовна Келдыш (р. 1904 г.,) доктор физико-математических наук, профессор (1964), занималась исследованиями в области топологии, математической логики и теории функций действительного переменного. Она сумела доказать существование основного, единственного топологического типа элементов некоторого класса.

Лауреатом премии им. П. Л. Чебышева (1966) и лауреатом Государственной премии (1969) стала Ольга Александровна Ладыженская (р. 1922 г.). Доктор физико-математических наук и профессор Ленинградского университета О. А. Ладыженская занимается исследованиями дифференциальных уравнений, приближенных и численных методов и в области функционального анализа. В содружестве с ней в тех же областях науки работает Нина Николаевна Уральцева (р. 1934 г.). Доктор физико-математический наук, профессор Ленинградского университета Нина Николаевна в 1966 г. стала лауреатом премии им. П. Л. Чебышева, а в 1969 г. — лауреатом Государственной премии.

Аналогичную область научной деятельности избрала и Ольга Арсеньевна Олейник (р. 1925 г.). Доктор физико-математических наук и профессор Московского университета О. А. Олейник за плодотворные результаты в научных исследованиях избрана действительным членом Итальянской академии наук.

Одним из основателей советской историко-математической школы была Софья Александровна Яновская (1896—1967). Доктор физико-математических наук С. А. Яновская занималась проблемами основания математики, математической логики, философии и истории математики с позиций марксистской методологии.

В области истории математики работает Изабелла Григорьевна Башмакова (р. 1921 г.), доктор физико-математических наук и профессор Московского университета. Она сделала серьезный вклад в изучение работ Л. Эйлера по теории чисел. И. Г. Башмакова с 1968 г. член-корреспондент Международной академии исторических наук.

В области истории математики работает и Галина Павловна Матвиевская (р. 1930 г.), доктор физико-математических наук и профессор с 1969 г. Она работает в АН Уз. ССР по исследованию трудов ал-Беруни.

Клавдия Яковлевна Латышева (1897—1956), доктор физико-математических наук и профессор Киевского университета, работала в области дифференциальных уравнений. Доктор физико-математических наук и профессор Московского университета Аделаида Борисовна Васильева (р. 1926 г.) также исследует проблемы дифференциальных уравнений и, кроме того, занимается приближенными и численными методами.

Елизавета Владимировна Вронская (р. 1898 г.), доктор физико-математических наук и профессор Ленинградского электротехнического института связи, областью своих исследований избрала теорию функций, функциональный анализ, приближенные и численные методы.

Любовь Николаевна Запольская (р. 1897 г.) окончила Геттенгенский университет. Впоследствии она стала доктором философских наук и магистром чистой математики. Работая в Саратовском университете, а затем в Ярославском педагогическом институте, она занималась исследованием проблем математического анализа.

В 28 лет стала доктором физико-математических наук и профессором Фаина Михайловна Кириллова (р. 1931 г.). Она занимается исследованием оптимальных процессов и проблемами функционального анализа в Институте математики АН БССР. Прикладной математикой (математические методы в гидромеханике) занимается Елена Александровна Красильщикова (р. 1919 г.), доктор физико-математических наук. Она работает в Институте механики АН СССР.

В Казанском университете доктор физико-математических наук и профессор Любовь Ивановна Чибрикова (р. 1925 г.) за-

нимается исследованиями в теории комплексного переменного, уравнений математической физики. Теории вероятностей, программированию и ЭВМ посвятила свою деятельность доктор физико-математических наук Елена Львовна Ющенко-Рвачева (р. 1919 г.). Работает она в Институте кибернетики АН УССР.

С каждым годом число женщин, занимающихся в области различных отделов математики (теоретической и прикладной), растет и множатся решения проблем, которыми они занимаются.

§ 10. РЕНЕ ДЕКАРТ — ВЕЛИКИЙ МАТЕМАТИК И МЫСЛИТЕЛЬ XVII в.[1]

XVII в — век создания математики переменных величин, высшей математики.

Развитие торговли и мореплавания, вызванное новыми географическими открытиями, и связанное с ним дальнейшее развитие астрономии, рост промышленности и техники способствовали зарождению новых математических идей и методов, отвечающих запросам естествознания и жизни.

Одним из создателей высшей математики был Декарт, гениальный французский ученый и мыслитель XVII в. Биография Декарта крайне поучительна, ибо его жизнь протекала в ожесточенной борьбе против старых средневековых взглядов на мир, за рациональное, научное изучение всех вопросов естествознания.

Рене Декарт родился 31 марта 1596 г. в местечке Лаэ в дворянской семье. Он воспитывался и получил образование в аристократическом колледже (среднее учебное заведение), находившемся в ведении католического монашеского ордена иезуитов. В этом колледже он проникся пренебрежением к схоластике и догматике, которые там господствовали, но заинтересовался естествознанием, географией и математикой. Вот что позже писал сам Декарт: «Как только возраст мне позволил не подчиняться больше своим наставникам, я совершенно оставил изучение наук и решил не искать новой науки, кроме той, которую мог бы обрести в самом себе и в великой книге природы. Я использовал оставшиеся молодые годы на то, чтобы путешествовать, видеть дворы и армии, изучать людей различных характеров и положений...»

По окончании колледжа Декарт жил несколько лет в Париже и вел обычный для знатных молодых людей того времени легкий образ жизни, с которым он, однако, резко порвал в 1615 г. Уединившись, он всецело предается изучению философии, естествознания и математики. Большую пользу принесла ему дружба с Мерсеном.

Желая осуществить старую мечту о длительных путешествиях, о том, чтобы «видеть дворы и армии», Декарт поступает в 1618 г. в голландскую армию и принимает участие в тридцатилетней вой-

[1] См.: Асмус В. Ф. Декарт. М., ГИТЛ, 1956.

не. Он путешествовал по Нидерландам и Италии и, закончив военную службу, пробыл некоторое время в Париже. Декарт, как и многие другие новаторы науки, подвергался жестоким преследованиям в католической Франции. Вот почему он в 1629 г. переселяется в Голландию, самую прогрессивную страну того времени.

В Голландии Декарт написал важнейшие свои труды. Наряду с выдающимися математическими исследованиями он открыл один из основных законов оптики, сформулировал закон сохранения количества движения, разработал новую гипотезу о происхождении планет, создал физическую теорию кровообращения и сделал значительный вклад в области философии[1]. Вся научно-философская деятельность Декарта была направлена против схоластики и церковных догм. Вместо слепой веры он выдвинул на первое место силу человеческого мышления, разум, способный познавать природу. Поэтому Декарт и указывал на математику как на образец для других наук.

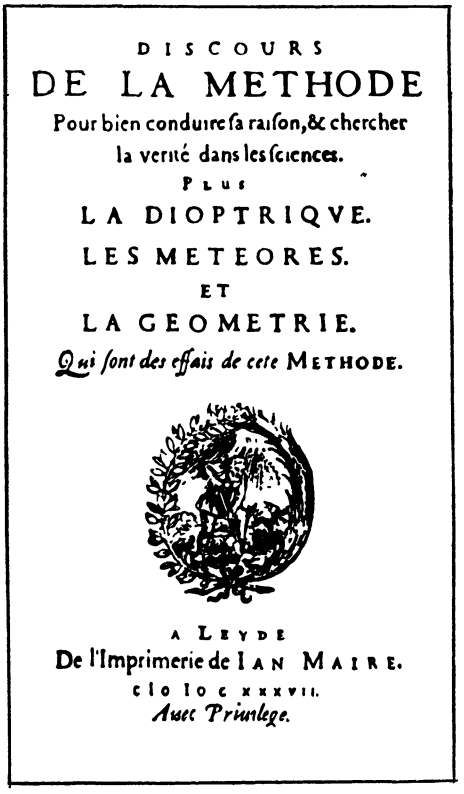

DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon,& chercher
la verité dans les ſciences.
Plus
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cette METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
clo Io c xxxvii.
Auec Priuilege.

Рис. 49. Титульный лист «Рассуждения о методе», в приложении к которому была опубликована «Геометрия» Декарта

Математические работы Декарта тесно связаны с его философскими и физическими исследованиями. Вышедшее в Лейдене в 1637 г. его философское произведение «Рассуждение о методе» содержало три приложения: «Диоптрика»[2], «О метеорах»[3] и «Геометрия» (рис. 49). В последнем изложены основы новой аналитической гео-

[1] В учении о физической природе Декарт — материалист, в учении же о человеке — дуалист. См. БСЭ.

[2] Теория оптических инструментов, в которой выведен закон преломления светового луча на границе двух сред.

[3] Учение о метеорологических явлениях.

метрии, базирующейся на методе координат. Созданием метода координат Декарт осуществил взаимопроникновение алгебры и геометрии. В отличие от Виета алгебра Декарта строилась фактически как *числовая*, а отрицательные числа у него получили реальное истолкование в виде направленных отрезков. Усовершенствовав алгебраическую символику Виета, Декарт ввел современные знаки для переменных и неизвестных величин (x, y, z, ...) и для буквенных коэффициентов (a, b, c, ...), а также общепринятое в настоящее время обозначение степеней (y^3, a^4, ...). Он в отличие от своих предшественников уже не группирует положительные члены в обеих частях уравнения, а вводит такую запись уравнений, при которой в одной части стоит нуль. В целом алгебраическая символика Декарта мало отличается от современной. Декарт положил начало ряду важнейших исследований свойств уравнений и внес ценный вклад в учение о приближенных и графических методах решения уравнений.

Поселившись в протестантской Голландии, Декарт не изменил свои воззрения, а его философия и новые научные идеи так резко противоречили господствовавшим до тех пор отсталым взглядам, что и здесь его столкновение со сторонниками схоластики и богословия стало неизбежным. Когда философские и научные взгляды Декарта стали проникать в более широкие круги интеллигенции и овладевать умами передовой молодежи, то богословы-протестанты, реакционные «ученые» Голландии, усмотрев в учении Декарта опасную для их господства силу, решили искоренить все возрастающее влияние идей Декарта. Великого ученого обвинили в атеизме, в оскорблении голландской церкви и возбудили против него верующих. Свыше восьми лет длилась клеветническая кампания теологов Голландии против Декарта. Декарт потратил много сил и времени на полемику и споры и, убедившись в том, что ему не добиться справедливости, решил покинуть Голландию.

По приглашению шведской королевы Христины Декарт переехал осенью 1649 г. в Стокгольм. В Швеции он чувствовал себя одиноким. Зимою 1649/50 г. Декарт давал Христине уроки философии и однажды, на пути во дворец королевы, простудился и заболел воспалением легких. Через девять дней, 11 февраля 1650 г., он скончался. Последние слова, произнесенные им, были: «Пора в путь, душа моя». В 1666 г. передовые люди Франции перевезли прах Декарта на родину. Католическая же церковь внесла сочинения Декарта в список запрещенных книг. Дух новаторства и свободного исследования истины, которыми были проникнуты все произведения великого ученого, оказали решающее влияние на дальнейшее развитие науки и философии в XVII—XIX вв.

За математическими произведениями Декарта и Ферма во Франции, Кавальери и Торричелли в Италии, Гюйгенса в Голландии, Барроу и Валлиса в Англии, содержавшими зачатки анализа, последовали работы Ньютона и Лейбница, которые завершили первый этап в развитии математики переменных величин.

§ 11. О ВЕЛИЧАЙШЕМ МАТЕМАТИКЕ XVIII в. — ЛЕОНАРДЕ ЭЙЛЕРЕ

Читайте, читайте Эйлера — он наш общий учитель!

Лаплас

Развитие высшей математики продолжалось на протяжении XVIII в. благодаря трудам выдающихся ученых, среди которых были *Ж. Л. Даламбер* — знаменитый энциклопедист, просветитель, *Ж. Л. Лагранж* — автор классического труда «Аналитическая механика», *П. С. Лаплас* — автор известной космогонической гипотезы и «Трактата о небесной механике» и многие другие.

Крупнейшим математиком XVIII в. и одним из величайших ученых всех времен и народов был *Леонард Эйлер*[1] (1707—1783). Родившись в Базеле (Швейцария) в семье пастора, Леонард получил первоначальное образование у своего отца, бывшего учеником знаменитого математика Якова Бернулли. Отец предназначал сына к богословскому званию и определил его по окончании средней школы на теологический факультет. Однако Эйлер интересовался не теологией, а математикой, и он стал слушать лекции известного профессора математики Иоганна Бернулли, младшего брата Якова Бернулли. О своем учителе Эйлер позже писал: «Хотя в частных уроках он мне отказал наотрез ввиду своей занятости, он дал мне, однако, весьма благотворный совет, состоящий в том, чтобы я сам

[1] См.: Башмакова И. Г. и Юшкевич А. П. Леонард Эйлер. — ИМИ, 1954, вып. VII; Котек В. В. Леонард Эйлер. М., 1961.

Ж. Л. Даламбер

Ж. Л. Лагранж

П. С. Лаплас

принялся за некоторые трудные математические книги и штудировал их со всем усердием, а если я встречу какое-нибудь препятствие или затруднение, он позволил мне свободно приходить к нему каждую субботу пополудни и любезно разъяснял мне все трудности. Это настолько достигало желанной цели, что, когда он устранял предо мной одно препятствие, тотчас же исчезали десять других, а это, разумеется, есть наилучший метод, чтобы добиться счастливых успехов в математических науках».

В 19-летнем возрасте Эйлер опубликовал первую свою научную работу и принял участие в объявленном Парижской академией наук конкурсе на тему о наилучшем расположении мачт на кораблэ. В 1727 г. Эйлер приехал в Петербург, где уже с 1725 г. находились два его друга, математики Даниил и Николай Бернулли, сыновья его учителя — Иоганна Бернулли. Эти ученые были приглашены на работу в Петербургскую академию наук. В Петербурге Эйлер нашел все необходимые условия для большой научной деятельности и широкие возможности для публикации своих трудов. Здесь он женился, провел бóльшую часть творческого периода своей жизни, став главой первой русской математической школы, здесь он и умер. Вот почему Россия стала для Эйлера второй родиной. Эйлер прожил в России 31 год и хорошо знал русский язык. Многие дети и внуки Эйлера остались жить в России, некоторые из его потомков поныне проживают в нашей стране.

В возрасте 26 лет Эйлер стал членом Петербургской академии наук. Он не ограничивался одной научной работой и публикацией докладов в академических трудах, а выступал с публичными научно-популярными лекциями в созданной при академии гимназии. Для этой же гимназии он составил учебник арифметики, первая часть которого вышла на русском языке в 1740 г., а вторая — в 1760 г. Эйлер был всесторонне образованным ученым: знал греческий, латинский, немецкий, французский, русский и другие языки; кроме математики, физики, астрономии, имел глубокие знания в области географии, химии, ботаники, анатомии, медицины и в других областях науки и техники. Он очень любил музыку, классиков древней литературы, в частности, знал наизусть «Энеиду» Виргилия. Эйлер был веселый, скромный и отзывчивый человек, оказывал помощь выходцам из народа и всем обращавшимся к нему молодым ученым. Он отличался редкой трудоспособностью

и был не только гениальным математиком, но и замечательным физиком, инженером, астрономом, географом и выдающимся вычислителем.

Д Бернулли

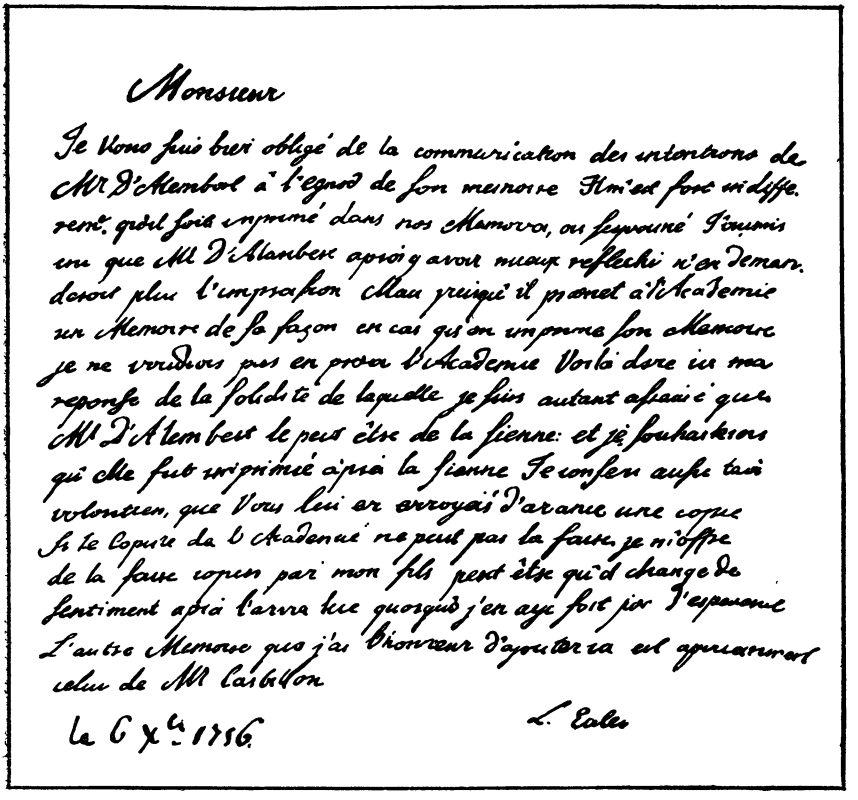
Много лет Эйлер работал над составлением географических карт России, написал фундаментальный труд по теории кораблестроения — «Морская наука», участвовал в комиссии мер и весов, в реализации других научных планов Петербургской академии наук. В 1739 г. Эйлер опубликовал работу по теории музыки, а в 1740 г. получил вместе с Д. Бернулли и английским математиком Маклóрином премию Парижской академии наук за труд в области теории морских приливов и отливов. Другие труды Эйлера относятся к оптике, механике, теории упругости, астрономии, баллистике, теории турбин, сопротивлению материалов и т. д. Творчество Эйлера отличалось глубиной мысли, разнообразием научных интересов и большой продуктивностью. Общее число его трудов превышает 860. Эйлер состоял членом многих европейских академий и научных обществ. В результате напряженной работы Эйлер еще в 1735 г. лишился правого глаза, а в 1766 г. потерял и второй глаз. Несмотря на это, его трудоспособность не снизилась. Часть своих трудов слепой ученый диктовал писцу. Это был мальчик-портной, которого Эйлер приютил, научил грамоте и элементам науки.

Тревожное положение в политической жизни России после смерти царевны Анны Иоанновны заставило Эйлера в 1741 г. переехать в Берлин, где он занял должность директора класса математики и члена правления Берлинской академии наук. Однако ученый сохранял тесные связи с Петербургской академией наук и поддерживал переписку с М. В. Ломоносовым и другими русскими учеными. В 1766 г. Эйлер со всей своей семьей вернулся в Петербург, где оставался и работал до последнего дня жизни (рис. 50).

Эйлер умер в возрасте 76 лет и был похоронен в Петербурге на Смоленском кладбище[1].

Сообщив о смерти Эйлера Парижской академии наук, известный французский математик Кондорсе сказал: «Эйлер прекратил вычислять и жить...» Петербургская академия наук продолжала издавать неопубликованные при жизни Эйлера работы на протяжении 80 лет. В 1957 г. в СССР и за рубежом было торжественно отмечено 250-летие со дня рождения Эйлера.

[1] В 1956 г. прах Эйлера был перенесен в Ленинградский некрополь.



Monsieur

Je Vous suis bien obligé de la communication des intentions de Mr D'Alembert à l'egard de son memoire Il m'est fort indifferent qu'il soit imprimé dans nos Memoires, ou supprimé J'ai mis ceci que Mr D'Alembert après y avoir mieux reflechi n'en demanderoit plus l'impression Mais puisqu'il promet à l'Academie un Memoire de sa façon en cas qu'on imprime son Memoire je ne voudrois pas en priver l'Academie Voilà donc ici ma reponse de la solidité de laquelle je suis autant assuré que Mr D'Alembert le peut être de la sienne: et je souhaiterois qu'elle fut imprimée après la sienne Je consens aussi très volontiers, que Vous lui en envoyés d'avance une copie si le Copiste de l'Academie ne peut pas la faire, je m'offre de la faire copier par mon fils peut être qu'il change de sentiment après l'arrivée quoiqu'il en ayt fort pour l'esperance L'autre Memoire que j'ai l'honneur d'ajouter ici est apparemment celui de Mr Castillon

le 6 Xbre 1756

L. Euler

Рис. 50. Автограф Л. Эйлера

Труды Эйлера из области математического анализа оказали огромное влияние на развитие высшей математики. Немало было сделано и в области элементарной математики. Известно, какое значение для изучения алгебры имела его «Универсальная арифметика», велики его заслуги в тригонометрии, в распространении и в выработке современных математических знаков (π, sin, cos и др.), ему же принадлежит одно из первых определений понятия функции.

Ценный вклад внес Эйлер и в теорию чисел. Евклид, как известно, доказал, что числа вида $2^n(2^{n+1}-1)$ — совершенные числа, если $2^{n+1}-1$ есть простое число. Эйлер же доказал обратную теорему: все четные совершенные числа имеют указанный вид, если $2^{n+1}-1$ есть простое число. Далее он указал многочлены, дающие простые числа. Одним из них, например, является квадратный трехчлен x^2-x+41, дающий при $x=0$; 1; 2; 3; ...; 39; 40 следующие простые числа: 41; 43; 47; 53; 61; 71; 83; 97; 113; 131; 151; 173; 197; 223; 251; 281; 313; 347; 383; 421; 461; 503; 547; 593; 641; 691;

743; 797; 853; 911; 971; 1033; 1097; 1163; 1231; 1301; 1373; 1447; 1523; 1601. (Проверить!)

В одном из своих писем Ферма утверждал, что любое простое число вида $4n + 1$ является суммой двух квадратов. Примеры:

1) $5 = 4 \cdot 1 + 1 = 1^2 + 2^2$,
2) $13 = 4 \cdot 3 + 1 = 2^2 + 3^2$,
3) $17 = 4 \cdot 4 + 1 = 4^2 + 1^2$,
4) $29 = 4 \cdot 7 + 1 = 2^2 + 5^2$ и т. д.

После многих лет упорного труда Эйлеру удалось найти доказательство этого предложения, которое было опубликовано в одном из его мемуаров в 1755 г.

В 1742 г. в письме к Эйлеру академик Х. Гольдбах высказал следующее предположение: любое число вида $4a^4 + 1$ (a — натуральное число) может быть простым только при $a = 1$. В ответном письме Эйлер сообщает следующее простое доказательство соответствующей теоремы:

$$4a^4 + 1 = (2a^2 + 2a + 1)(2a^2 - 2a + 1).$$

Из данного разложения видно, что при $a = 1$ число равно 5, для всякого же другого значения a — число составное.

Эйлер был не только великим ученым, но и замечательным педагогом. Он много сделал для развития математического образования в России. Видными последователями первой возглавляемой Эйлером математической школы в России были русские ученые XVIII в. Семен Кириллович Котельников, Степан Яковлевич Румовский, Николай Иванович Фусс, Михаил Евсеевич Головин и др., которые в свою очередь подготовили почву для появления в XIX в. великих русских математиков: Остроградского, Лобачевского, Чебышева и др.

§ 12. О ДВУХ ВЫДАЮЩИХСЯ РУССКИХ МАТЕМАТИКАХ XIX в. — ОСТРОГРАДСКОМ И ЧЕБЫШЕВЕ

На протяжении XIX в. продолжалась дальнейшая разработка теории математического анализа большим числом выдающихся ученых, среди которых были К. Ф. Гаусс, Б. Риман, К. Вейерштрасс в Германии, О. Коши и Ж. Фурье во Франции, М. В. Остроградский, С. В. Ковалевская и П. Л. Чебышев в России и др.[1].

Михаил Васильевич Остроградский родился 24 сентября 1801 г. в деревне Пашенной, Полтавской губернии (ныне области), в семье помещика-дворянина. О его детстве младший брат Андрей Васильевич рассказывает следующее: «В детстве Михаил Васильевич особенно любил в игрушках своих знать каждой вещи меру и величину. Мельницы, ветряные и водяные, сильно занимали его: он стоял перед ними по часу и более, смотря на движение крыльев, а внут-

[1] См.: Прудников В. Е. Русские педагоги-математики XVIII — XIX вв. М., 1956.

М. В. Остроградский

ри мельницы — на вращение камней. В водяной мельнице занимало его падение воды с лотков колеса. Он до того любил все измерять, что когда отец и мать шли куда с ним, то старались, чтобы Миша не заметил мельницы или колодца. Если только видел он то или другое, то настойчивым криком и слезами просил остановиться, в мельнице наблюдать движение колес или крыльев, а колодец измерять. У него в кармане постоянно был шнурок с камешком на конце; брат опускал свой снаряд в колодец и, вынувши оттуда, протягивал свой шнурок на земле и рассчитывал глубину колодца.

В 15-летнем возрасте Остроградский уже слушал лекции в Харьковском университете, а в 1817 г. был зачислен студентом физико-математического факультета. Большое влияние оказали на Остроградского лекции профессора математики Харьковского университета Т. Ф. Осиповского, видного мыслителя-материалиста, боровшегося против реакционной политики царского министерства просвещения. Остроградскому, который был студентом-отличником, было отказано в выдаче диплома по окончании факультета только потому, что он отказался слушать лекции богословия. Михаил Васильевич, желая продолжить занятия математикой, был вынужден уехать в 1822 г. в Париж. Здесь Остроградский слушал лекции великих математиков того времени — Лапласа, Фурье, Коши, Пуассона, Ампера. Вскоре Остроградский обратил на себя внимание учителей своими успехами. В 1826 г. он представил Парижской академии наук мемуар «О распространении волн в цилиндрическом бассейне». Знаменитый французский математик Коши писал об Остроградском следующее: «Этот русский молодой человек одарен большой проницательностью и весьма сведущий». В 1828 г. Михаил Васильевич вернулся на родину и был оценен соотечественниками по достоинству. В 1830 г. он стал членом Петербургской академии наук.

Научные труды создали Остроградскому широкую славу не только в России, но и за рубежом. Основные его работы относятся к математическому анализу и механике, теории упругости и магнетизма, к алгебре и теории чисел. Остроградский уделял особое внимание тем математическим работам, которые могли быть использованы в практической деятельности человека. Так, например, с целью облегчить работу по проверке товаров, поставляемых армии, М. В. Остроградский занялся математическим исследованием, по-

священным статистическим методам браковки и основанным на применении теории вероятности.

Благодаря выдающимся научным заслугам М. В. Остроградский был избран членом-кореспондентом Парижской академии наук, членом Американской, Римской и других академий и научных обществ.

М. В. Остроградский развернул в Петербурге большую педагогическую и общественную деятельность. Он был профессором Морского кадетского корпуса, Института инженеров путей сообщения, Главного педагогического института, Главного артиллерийского училища и других учебных заведений. Много лет он работал в качестве главного наблюдателя за преподаванием математики в военных школах.

М. В. Остроградский составил замечательные для своего времени учебники по высшей и элементарной математике («Программа и конспект тригонометрии», «Руководство начальной геометрии» и др.) и написал ряд популярных педагогических статей. В архивах Академии наук СССР хранятся многие еще не опубликованные рукописи Остроградского. В одной из них содержится следующее оригинальное изложение решения квадратного уравнения.

Пусть α — корень квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

тогда

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0. \tag{2}$$

Вычитая почленно, получим :

$$a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha) = 0,$$

или

$$a(x - \alpha)\left(x + \alpha + \frac{b}{a}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что если существует корень α, то должен существовать и корень $\beta = -\left(\alpha + \frac{b}{a}\right)$ уравнения (1). Следовательно, квадратный трехчлен (1) можно представить так:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta). \tag{3}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного, получаем известную «теорему Виета»:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}. \tag{4}$$

Затем выводятся условия существования двойного корня:

$$\alpha = \beta = -\frac{b}{2a}.$$

Тогда

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a},$$

так как $c = \frac{b^2}{4a}$, то $b^2 - 4ac = 0$ — необходимое условие для существования двойного корня. Оно и достаточно, ибо для $c = \frac{b^2}{4a}$ получаем:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

откуда

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}.$$

Когда получим, согласно (3), разные корни?

Из равенств (4) имеем

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad -4\alpha\beta = -\frac{4c}{a},$$

значит,

$$(\alpha - \beta)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}, \quad \alpha - \beta = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a},$$

так как

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a},$$

то

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

или

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (5)$$

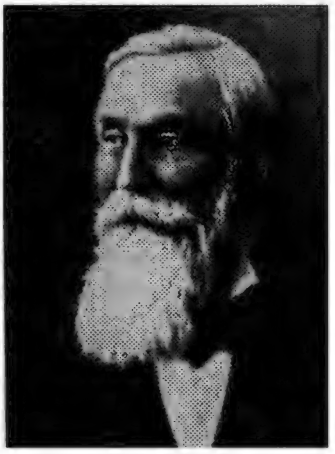
Формула (5) говорит о том, что если $b^2 - 4ac > 0$, то уравнение (1) будет иметь различные действительные корни.

М. В. Остроградский умер 20 декабря 1861 г. и был погребен в родной деревне. С его именем связано начало периода оригинального математического творчества русских ученых. Учениками и друзьями Остроградского были видные русские ученые Н. Д. Брашман, Н. П. Петров, В. Я. Буняковский и др.

* *
*

Один из величайших математиков XIX в. — *Пафнутий Львович Чебышев*, родился 4 мая 1821 г. в дворянской семье в селе Окато-

во Калужской губернии. Первоначальное образование он получил дома. В детские годы Чебышев увлекался изучением механизмов игрушек и аппаратов и сам часто мастерил и придумывал разные механические игрушки. Эту склонность и любовь к механизмам он сохранил на всю жизнь.



П. Л. Чебышев

Чебышеву было 16 лет, когда он поступил на математическое отделение Московского университета, где слушал лекции профессоров Н. Д. Брашмана, Н. Е. Зернова и др. Уже при переходе на второй курс Чебышев принимает участие в объявленном для студентов конкурсе и получает серебряную медаль университета за работу «Вычисление корней уравнений». После окончания университета в 1841 г. и защиты диссертации он был в 1847 г. утвержден в звании доцента и начал читать лекции по алгебре и теории чисел в Петербургском университете. Прошли еще три года, и Чебышев, защитив докторскую диссертацию, стал профессором Петербургского университета. Эту должность он занимал до старости.

Научная деятельность П. Л. Чебышева была исключительно многообразной и плодотворной. Основные его труды относятся к теории чисел, теории вероятностей и математическому анализу. В этих областях он открыл новые методы исследования и оставил ряд важнейших результатов. Своеобразие Чебышева как ученого определяется тем, что он умел связать проблемы математики с вопросами естествознания и техники и мастерски соединять воедино «отвлеченные» теории с широкой практикой. Вот некоторые примеры названий трудов и статей Чебышева: «Об одном механизме», «О зубчатых колесах», «О построении географических карт», «О кройке платьев» и др. Такие работы Чебышева находились в тесной связи с его теоретическими трудами, вроде «Теории функций, наименее уклоняющихся от нуля», «Теория сравнений» и др. О взаимном влиянии практики на теорию П. Л. Чебышев писал: «Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает, сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах, давно известных. Несмотря на ту высокую ступень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика явно обнаруживает неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы, существенно новые для науки, и, таким образом, вызывает на изыскание совершенно

новых метод. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом случае наука находит себе верного руководителя в практике».

Многие работы Чебышева посвящены теории машин и механизмов. Среди машин, им сконструированных, следует отметить стопоходящую машину, подражающую движениям животного при ходьбе, и автоматический арифмометр. За механизмы, показанные на выставке 1893 г. в Чикаго (США), Чебышев был премирован и награжден.

Благодаря выдающимся исследованиям в области математики П. Л. Чебышев был избран членом 25 разных академий и научных обществ: Петербургской, Парижской, Римской, Стокгольмской и др. Президент Парижской академии наук, известный математик Шарль Эрмит заявил, что Чебышев «является гордостью русской науки и одним из величайших математиков Европы», а профессор Стокгольмского университета Миттаг-Лефлер утверждал, что Чебышев — гениальный математик и один из величайших аналистов всех времен.

Среди многочисленных исследований Чебышева одно из первых мест занимают его работы по теории чисел. В своих мемуарах «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» (1849) и «О простых числах» (1852) Чебышев впервые после Евклида существенно развил учение о простых числах. Характер последовательности простых чисел в натуральном ряду свидетельствует об исключительно сложной закономерности распределения простых чисел. Вот таблица распределения простых чисел по сотням до 1000 (см. табл. 4).

Таблица 4

Между	1 100	101 200	201 200	301 400	401 500	501 600	601 700	701 800	801 900	901 1000
Число простых чисел	25	21	16	16	17	14	16	14	15	14

С одной стороны, существуют простые числа с минимальным расстоянием 2. (Примерами могут служить числа-близнецы). С другой стороны, в натуральном ряду встречаются сколь угодно большие промежутки, не содержащие простого числа. Так, среди m последовательных натуральных чисел

$$(m+1)!+2;\ (m+1)!+3,\ \ldots;\ (m+1)!+m;\ (m+1)!+(m+1)$$

простых чисел вовсе нет, так как первое делится на 2, второе — на 3, ..., последнее — на $m + 1$. Хотя таблица показывает, что в среднем с ростом чисел простые числа встречаются все реже, одинаковые пропуски встречаются независимо от величины чисел, например промежуток между простыми числами 1327 и 1361, а также между простыми числами 8467 и 8501 содержит по 34 составных числа, стоящих одно за другим.

Вопрос о распределении простых чисел в натуральном ряду занимал умы лучших математиков всех времен, среди которых были Диофант, Ферма, Эйлер, Лагранж, Лежандр и Гаусс. Однако первым, кто со времен Евклида добился существенного результата в этом вопросе, был Чебышев. Он открыл закон, формулу, которая позволяет приближенно определять число простых чисел, заключенных между 1 и некоторым натуральным числом N. Чебышев также впервые доказал так называемый «постулат Бертрана». Член Парижской академии наук, французский математик Ж. Л. Бертран высказал в качестве гипотезы следующее предложение: между натуральными числами n и $2n$ при $n > 1$ всегда находится хотя бы одно простое число. Все старания Бертрана дать общее доказательство этого предложения были безрезультатны, и он был вынужден принять его в качестве гипотезы. Чебышев же доказал это предложение и тем внес ценный вклад в исследование вопроса о распределении простых чисел.

Работы Чебышева в области теории чисел выдвинули его в первые ряды величайших математиков XIX в. Известный английский математик Сильвестр сказал как-то, что для получения новых результатов в вопросе распределения простых чисел требуется ум, настолько превосходящий ум Чебышева, насколько ум Чебышева превосходит ум обыкновенного человека.

Пафнутий Львович не ограничивался лишь профессорской и научной деятельностью. Подобно другим крупнейшим ученым его времени, он отдавал много сил общественной деятельности. В качестве члена ученого комитета Министерства просвещения он рецензировал учебники, составлял программы и инструкции для начальных и средних школ. Он был одним из организаторов Московского математического общества и первого в России авторитетного математического журнала «Математический сборник». В течение сорока лет Чебышев принимал активное участие в работе военного артиллерийского ведомства и работал над усовершенствованием дальнобойности и точности артиллерийской стрельбы. В курсах баллистики до наших дней сохранилась формула Чебышева для вычисления дальности полета снаряда. Своими трудами Чебышев оказал большое влияние на развитие русской артиллерийской науки.

От П. Л. Чебышева идет математическая школа, носящая его имя. Последователями Чебышевской (иначе называемой Петербургской) математической школы были выдающиеся русские ученые: Е. И. Золотарев (1847—1878), А. А. Марков (1856—1922),

А. М. Ляпунов (1857—1918), В. А. Стеклов (1863—1926), Герой Социалистического Труда академик А. Н. Крылов (1863—1945) и др. К этой школе[1] принадлежат и известные во всем мире советские математики: С. Н. Бернштейн, И. М. Виноградов, Б. Н. Делоне и др. Советские ученые занимают одно из первых мест в таких областях математики, как теория чисел, теория вероятностей и теория приближенного представления функций.

П. Л. Чебышев умер 7 декабря 1894 и был погребен в родном имении, в селе Спас, которое находится в 90 км от Москвы. Мозг Чебышева хранится в музее Военно-медицинской академии имени С. М. Кирова.

Чебышев оставил огромное литературное и идейное наследие, которое еще долго будет питать советскую и мировую науку.

---

[1] См.: Делоне Б. Н. Математика и ее развитие в России. М., 1948, с. 10.

Глава 6
ГЕОМЕТРИЯ

§ 13. ПРАКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ У РАЗНЫХ НАРОДОВ

Крупнейший историк древности Геродот, как и математик Демокрит, философ Аристотель и другие древнегреческие ученые и писатели, считал Египет колыбелью геометрии. Демокрит, например, писал: «В построении линий я никем не был превзойден, даже египетскими гарпедонаптами». Так называемые гарпедонапты были, как полагают, землемерами, которые для выполнения своих работ пользовались натянутыми веревками. Геометрия как практическая наука нужна была египтянам не только для восстановления границ земельных участков после каждого разлива Нила, но и при различных хозяйственных работах, при сооружении оросительных каналов, грандиозных храмов и пирамид, при высечении из гранита знаменитых сфинксов и т. п.

Содержащиеся в дошедших до нас папирусах геометрические сведения и задачи почти все относятся к вычислению площадей и объемов. В них нет никаких указаний на способы вывода тех правил, которыми пользовались египтяне для вычисления длин, площадей и объемов; часто употреблялись правила приближенных подсчетов (см. гл. 1, § 6; 22). Высшим достижением египетской геометрии следует считать точное вычисление объема усеченной пирамиды с квадратным основанием, содержащееся в «Московском папирусе».

Найденные при раскопках клинописные таблички свидетельствуют, как известно, о высоком уровне развития вавилонской арифметики и алгебры, но не позволяют утверждать того же относительно геометрических знаний вавилонян[1]. Кроме понятия пропорциональности отрезков при пересечении прямых параллельными прямыми и теоремы Пифагора, вавилонская геометрия сводилась к вычислению площадей и объемов некоторых фигур. При этом под пространственными фигурами вавилоняне понимали некоторые конкрет-

[1] См.: Вайман А. А. Шумеро-вавилонская математика. М., 1961, с. 103 и сл.

Н. И. Лобачевский

ные предметы, с которыми они сталкивались в строительной и других видах практической деятельности. Вавилоняне пользовались довольно грубым приближением значения π: длину окружности они приравнивали трем диаметрам. Для практических нужд того времени это значение, видимо, было достаточным.

В первой части самого древнего дошедшего до нас китайского математико-астрономического сочинения «Чжоу-би», написанного около 1100 лет до н. э., содержатся предложения, относящиеся к прямоугольному треугольнику, среди них и теорема Пифагора (рис. 51). В этом же сочинении дается правило нахождения площади круга (при этом для π берется значение[1] 3), определяются расстояния между недоступными предметами. Источники, относящиеся ко II в. до н. э., свидетельствуют о том, что к этому времени ученые Китая владели многими практическими способами и приемами для измерения площадей и объемов. В трактате «Математика в девяти книгах» первая книга названа «Измерение полей» и содержит задачи на вычисление площадей земельных участков различной геометрической формы. Среди приведенных фигур имеются треугольники, трапеции, прямоугольники, круги, круговые сегменты, сектора и кольца. Правила вычисления площадей прямолинейных фигур в основном совпадают с современными. Однако терминология еще крайне примитивна. Так, для понятия «трапеция» употребляется название «косое поле» или «поле в виде совка», вместо «сектора» — «кривое поле», вместо «сегмента» — «поле в виде лука» (тетива — основание, стрела — высота). Нет особого термина для радиуса, всегда задается диаметр. Для определения площади круга даются четыре п р а в и л а.

1. «Умножить половину обвода на половину диаметра» $\left(\text{т. е. } \frac{2\pi R}{2} \cdot \frac{2R}{2}\right)$.

2. «Умножь обвод на диаметр, раздели на 4» $\left(\text{т. е. } \frac{2\pi R \cdot 2R}{4}\right)$.

3. «Умножь диаметр сам на себя, раздели на 4, возьми 3 раза» $\left(\text{т. е. } 3 \cdot \frac{2R \cdot 2R}{4} = 3R^2, \text{ значит, } \pi = 3\right)$.

4. «Умножь обвод сам на себя, раздели на 12» $\left(\text{т. е. } \frac{2\pi R \cdot 2\pi R}{12}, \text{ здесь опять } \pi = 3\right)$.

[1] Впоследствии считали $\pi = 3\frac{1}{8}$. См. гл. 4, § 16, 37.

В V книге содержатся задачи на вычисление объемов крепостных стен, валов, плотин, каналов и других сооружений и в связи с этим вычисляются объемы следующих геометрических тел: параллелепипеда, пирамиды, усеченной пирамиды, цилиндра. Из других книг этого трактата можно заключить, что китайцы умели вычислять и объем конуса, сферы и других тел. Задачи посвящены в целом вопросам практической геометрии.

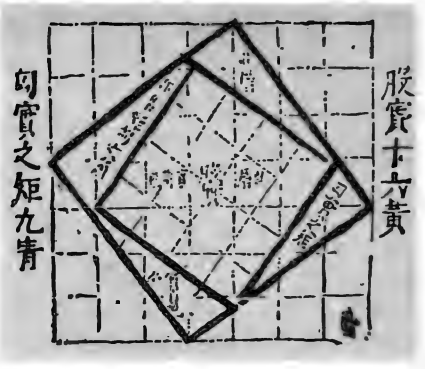


Рис. 51. Теорема Пифагора в древнейшем китайском трактате «Чжоу-би»

Практический характер имела и древнеиндийская геометрия, развитие которой связано как с повседневными жизненными потребностями, так и с религиозными обрядами, с культом жертвоприношения. В некоторой части дошедших до нас под названием «Сульва-Сутра» («правила веревки») священных древнеиндийских книг излагаются сведения о свойствах фигур, связанных с построением алтарей-жертвенников. В них встречаются описания вычисления площадей, построения квадрата по данной его стороне, построения круга, равновеликого данному квадрату, деления расстояния на равные части, деления площадей прямоугольников, квадратов и трапеций с помощью прямых. В этих книгах имеются также примеры практического применения теоремы Пифагора и подобия треугольников.

В сутрах имеются, конечно, одни правила и приемы, без каких-либо выводов или объяснений. Например, правило построения прямого угла (в сутрах — «перпендикуляра к направлению жертвенника») поясняется на таком примере: если длина линии (AB) (рис. 52) равна 39, то, вбивая колья в землю в точках A и B, прикрепляют к ним концы веревки длиной 51 и с узлом на расстоянии 15 от одного из концов. Держа за узел и подтянув веревку, получим прямой угол ACB.

В математико-астрономических произведениях индийских ученых (Ариабхатты, Брахмагупты, Сриддхары, Бхаскары и др.) встречаются многие приближенные формулы, практические приемы и правила вычисления площадей (рис. 53). В своем произведении «Патиганита», являющемся руководством по арифметике и измерению фигур, Сриддхара критикует примене-

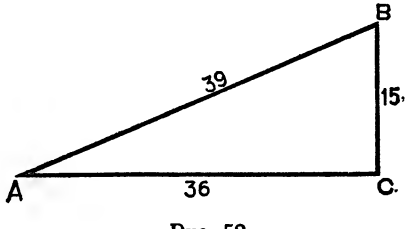


Рис. 52

ние для площади четырехугольника грубо приближенной формулы $S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$, восходящей к древним египтянам, и пользуется правилом

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)\ (p-c)(p-d)}.$$

Это тоже приближенная формула, точно верная только для вписанных четырехугольников. И в Древней Греции наряду с блестящим развитием теоретической геометрии, научных методов исследования и логических доказательств большое значение имела практическая и прикладная геометрия.

Произведения Герона Александрийского являются своего рода энциклопедией древнегреческой прикладной механики и практической геометрии. В его «Метрике» даются правила не только для точного, но и для приближенного вычисления площадей и объемов фигур. Изложение в некоторых трудах Герона в основном такое же, как и в математических сочинениях Древнего Египта, Вавилона, Китая, Индии. Правила не доказываются, а только формулируются и поясняются на конкретных, взятых из практической жизни примерах. «Геометрикой» Герона пользовались сотни лет в качестве справочника не только греческие, но и римские землемеры и архитекторы. Римляне вообще занимались одной лишь практической и прикладной стороной математики, необходимой для землемерия, строительства городов, технических и военных сооружений. Об этом свидетельствует и компилятивная «Геометрия» Боэция (V в.). Влияние «Геометрики» Герона во многих странах Европы можно последить на протяжении средних веков вплоть до эпохи Возрождения.

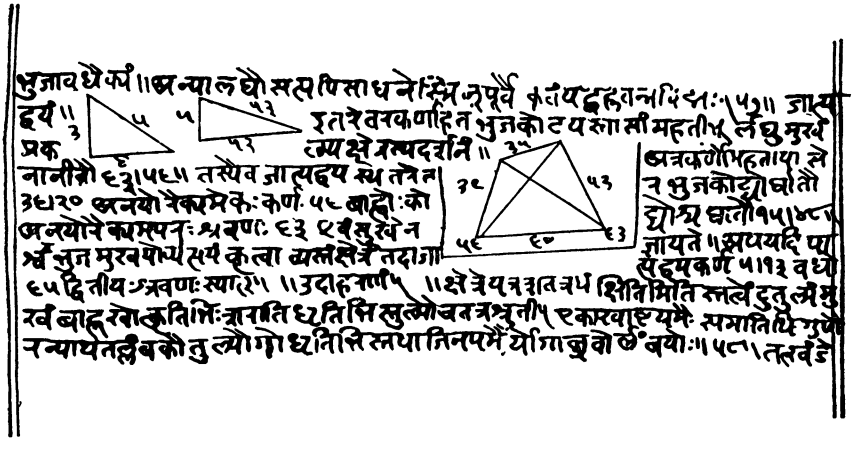


Рис. 53. Из «Лилавати» Бхаскары: «Рассмотрим два прямоугольных треугольника ...»

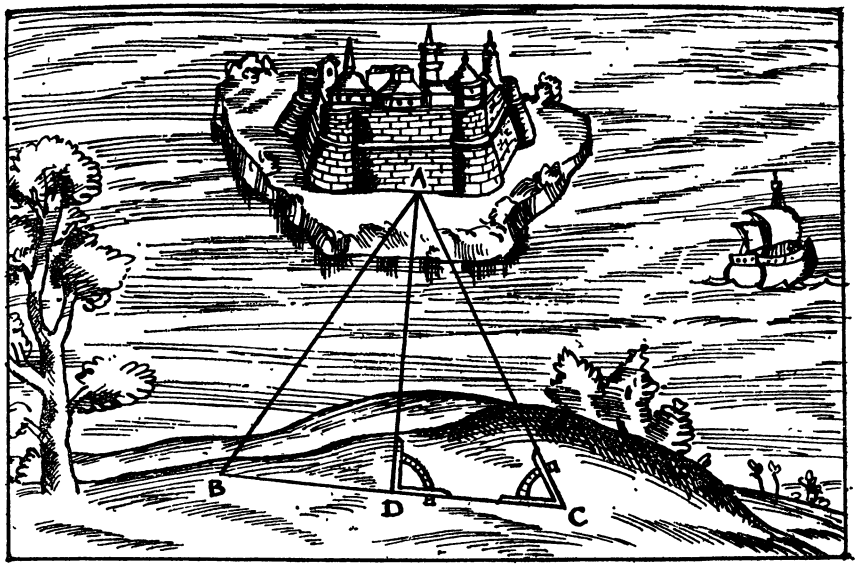


Рис. 54. Измерение расстояния от берега до замка, расположенного на острове. Из итальянского учебника XVIII в.

В XVI — XVII вв. все более развивающиеся промышленность и торговля требуют удовлетворения в первую очередь практических нужд. Появление первых инструментов и аппаратов для научных исследований (термометра, телескопа, барометра, микроскопа и др.) вызвало интерес среди широких кругов к практической стороне науки, и особенно к практической геометрии, которая нужна была для военных целей, мореплавания, строительства и землемерия. В этот период появляется много руководств по геометрии, в которых излагаются правила, формулы и рецепты для решения тех или иных практических задач.

Нить практической геометрии тянулась от вавилонян и древних египтян через Герона вплоть до новых времен (рис. 54). Однако тогда, как в старину, практические правила измерения площадей и объемов являлись результатом отсутствия удовлетворительных теоретических знаний, в новые времена большинство книг практической геометрии содержат результаты и правила, строго доказанные в «Началах» Евклида или в других теоретических трудах.

* * *

Интересно отметить некоторые черты развития практической геометрии в Древней Руси[1].

[1] См.: Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. М., 1946, с. 11—48.

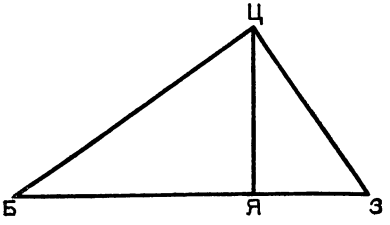


Рис. 55

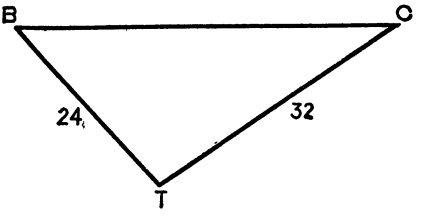


Рис. 56

Уже в XVI в. нужды землемерия, строительства и военного дела привели к созданию рукописных руководств геометрического содержания. Первое дошедшее до нас сочинение этого рода носит название «О земном верстании, как земля верстать». Оно является частью «Книги сошного письма», написанной, как полагают, при Иване IV в 1556 г. Сохранившаяся копия относится к 1629 г. В этой рукописи все геометрические сведения сводятся к вычислению площадей квадрата, прямоугольника, треугольника и равнобочной трапеции. Площади первых двух фигур определяются правильно. А вычисления площадей треугольников и трапеций даны с грубыми приближениями (см. гл. 2, § 6).

При разборе Оружейной палаты в Москве в 1775 г. была обнаружена инструкция «Устав ратных, пушечных и других дел, касающихся до военной науки», изданная в 1607 и 1621 гг. и содержащая некоторые геометрические сведения, которые сводятся к определенным приемам решения задач на нахождение расстояний. Вот один пример.

Для измерения расстояния от точки *Я* до точки *Б* (рис. 55) рекомендуется вбить в точке *Я* жезл примерно в рост человека. К верхнему концу жезла *Ц* прилагается вершина прямого угла угольника так, чтобы один из катетов (или его продолжение) проходил через точку *Б*. Отмечается точка *З* пересечения другого катета (или его продолжения) с землей. Тогда расстояние $|БЯ|$ относится к длине жезла $|ЦЯ|$ так, как длина жезла к расстоянию $|ЯЗ|$. Для удобства расчетов и измерений жезл был разделен на 1000 равных частей.

В правилах вычисления площадей в некоторых ранних рукописях ошибочно утверждается, что прямолинейные фигуры с равными периметрами равновелики, а теорема Пифагора применяется для приближенного определения расстояний и в случае непрямоугольных треугольников. Вот один пример (рис. 56). «Хошь узнати промежь какими местами, не ходя и не меревь, что будет промежь верст, или сажен, или аршин. И ты сице познавай: как ходил будто к Троице в Сергиев монастырь, и тут 32 версты. Ходил же в Воскресенский монастырь, и тут будто 24 версты. Что будет промежь теми монастырями, скажи, не меревь, и в какую сторону

сколько верст? И что из делу выдет, сколько будет промежь теми местами верст или что-нибудь».

Хотя в условии задачи не сказано, что треугольник прямоугольный, ее решали на основании теоремы Пифагора:

$$\sqrt{24^2 + 32^2} = \sqrt{576 + 1024} = \sqrt{1600} = 40.$$

Большинство рукописей XVII в. отличается сугубо практическим характером, задачи решаются иногда с грубыми приближениями, например, при вычислении объемов житниц в виде цилиндров для π берется значение 3, а в одном случае за площадь косоугольного треугольника берется полупроизведение двух сторон. Однако имеются и рукописи теоретического характера, содержащие систематическое изложение элементов геометрии. Так называемая «рукопись Елизарьева», относящаяся к первой четверти XVII в., превосходит по содержанию, систематичности изложения и методическому направлению все другие известные нам геометрические рукописи того же века.

В 1703 г. появилась «Арифметика» Магницкого, содержавшая отдельные сведения практической геометрии, в том числе и некоторые правила Герона. В 1708 г. вышел первый печатный русский учебник геометрии, озаглавленный «Геометрия словенски землемерие». Второе издание этой книги, посвященной геометрическим построениям, вышло через год и было названо «Приемы циркуля и линейки». Изданная в 1714 г. «Геометрия практика»[1] содержит преимущественно сведения для вычислений, ее можно считать первым русским руководством по тригонометрии. Эти книги начала XVIII в., появившиеся в связи с Петровскими преобразованиями, носили практический характер, наподобие западноевропейских руководств «практической геометрии» XVII и начала XVIII вв.

В 1739 г. вышло в Петербурге первое русское издание «Начал» Евклида, переведенное с латинского языка Иваном Сатаровым и под редакцией А. Фархварсона. В 1748 г. появилось «Краткое руководство к теоретической геометрии» Г. В. Крафта.

§ 14. О РАЗВИТИИ ГЕОМЕТРИИ В ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ ДО ЕВКЛИДА

Ученые и философы Древней Греции восприняли и переработали достижения культуры и науки Древнего Востока. Фалес, Пифагор, Демокрит, Евдокс и др. ездили в Египет и Вавилон для изучения музыки, математики и астрономии. Не случайно зачатки греческой геометрической науки связаны с именем *Фалеса Милетского*, основателя *ионийской* школы. Ионийцы, населявшие территорию, которая граничила с восточными странами, первыми заимствовали знания Востока и стали их развивать. Ученые

[1] См.: Юшкевич А. П. Главы по истории математики в средние века. — В кн.: История естествознания в России. М., 1957, т. I, с. 45—48

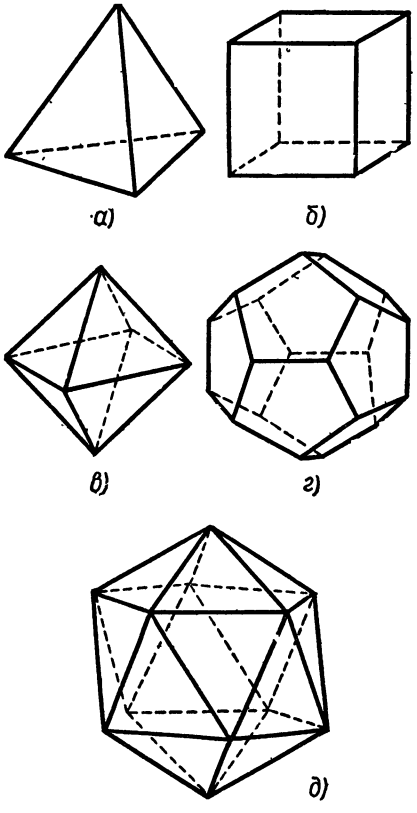


Рис. 57, *а, б, в, г, д*. Пять правильных многоугольников

ионийской школы впервые подвергли логической обработке и систематизировали математические сведения, позаимствованные у древневосточных народов, в особенности у вавилонян. Фалесу, главе этой школы, Прокл и другие историки приписывают немало геометрических открытий. Об отношении *Пифагора Самосского* к геометрии Прокл пишет в своем комментарии к «Началам» Евклида следующее: «Он изучал эту науку (т. е. геометрию), исходя от первых ее оснований, и старался получать теоремы при помощи чисто логического мышления». Прокл приписывает Пифагору, кроме известной теоремы о квадрате гипотенузы, еще построение пяти правильных многогранников[1]:

1) тетраэдр (рис. 57,*а*), имеющий 4 грани, 4 вершины, 6 ребер;

2) куб (рис. 57, *б*) — 6 граней, 8 вершин, 12 ребер;

3) октаэдр (рис. 57, *в*) — 8 граней, 6 вершин, 12 ребер;

4) додекаэдр (рис. 57, *г*) — 12 граней, 20 вершин, 30 ребер;

5) икосаэдр (рис. 57, *д*) — 20 граней, 12 вершин, 30 ребер.

Грани додекаэдра являются правильными пятиугольниками. Диагонали же правильного пятиугольника образуют так называемый звездчатый пятиугольник (рис. 58) — фигуру, которая служила эмблемой, опознавательным знаком для учеников Пифагора. Известно, что

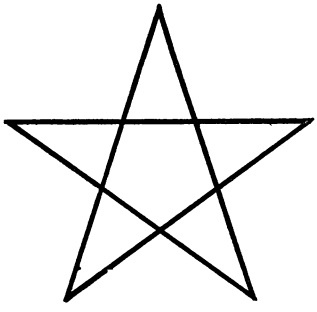


Рис. 58

[1] Б. Ван дер Варден и другие ученые считают, что Пифагор, возможно, был знаком с кубом, тетраэдром и додекаэдром, но октаэдр и икосаэдр, вероятно, были впервые открыты Теэтетом Афинским (IV в. до н. э.).

пифагорейский союз был одновременно философской школой, политической партией и религиозным братством. Согласно легенде, один пифагореец заболел на чужбине и не мог перед смертью расплатиться с ухаживавшим за ним хозяином дома. Последний нарисовал на стене своего дома звездчатый пятиугольник. Увидав через несколько лет этот знак, другой странствующий пифагореец осведомился о случившемся у хозяина и щедро его вознаградил.

Достоверных сведений о жизни и научной деятельности Пифагора не сохранилось. Ему приписывается создание учения о подобии фигур. Он, вероятно, был среди первых ученых, рассматривавших геометрию не как практическую и прикладную дисциплину, а как абстрактную логическую науку.

В школе Пифагора было открыто существование несоизмеримых величин, т. е. таких, отношение между которыми невозможно выразить никаким целым или дробным числом. Примером может служить отношение длины диагонали квадрата к длине его стороны, равное $\sqrt{2}$. Число это не является рациональным (т. е. целым или отношением двух целых чисел) и называется иррациональным, т. е. нерациональным (от латинского ratio — отношение).

Пифагорейцы не знали других чисел, кроме рациональных. Построив диагональ квадрата, сторона которого равна 1, они констатировали, что она не может быть выражена никаким числом, так как для них не было других чисел, кроме целых и дробных. Этот факт привел в большое смущение пифагорейцев, так как в основе их философии лежало понятие о числе как основе всех вещей и явлений природы. Но вот эта великая основа — число — не в состоянии выразить длины простого отрезка в простой фигуре — диагонали квадрата. Вот почему открытие несоизмеримых величин явилось большим ударом по учению Пифагора и пифагорейцы долго его держали в строгой тайне. Согласно преданию, ученик Пифагора, раскрывший публично эту тайну, был наказан богами и погиб во время кораблекрушения. Открытие несоизмеримых величин было важным поворотным пунктом в развитии античной математики. Узнав, что существуют отношения величин, не выражаемые никакими рациональными числами, древнегреческие ученые стали представлять величины не арифметически, а геометрически, не числами, а отрезками. Таким образом возникла *геометрическая алгебра*, а потом и теория отношений Евдокса.

Когда в греческих колониях Южной Италии пришли к власти сторонники рабовладельческой демократии, школа Пифагора, выражавшая интересы рабовладельческой аристократии, была разгромлена. Пифагорейцы бежали из Кротона и Тарента в другие города. Это обстоятельство во многом способствовало распространению пифагорейской математики по всей Греции и частично за ее пределами. В V в. до н. э. культурным и научным центром стали Афины. В этот «золотой век» возникли знаменитые памятники эллинской культуры: великолепные произведения скульптуры, архитектуры и литературы, храмы Акрополя, трагедии Эсхилла,

Софокла и Еврипида, «истории» Геродота и др. В области философии и науки в этом веке выделяются *Анаксагор* из Клазомен и *Демокрит* из Абдеры, которые учили, что Солнце и Луна — не живые божественные существа, как утверждали пифагорейцы, а просто неодушевленные тела, носящиеся в вихре атомов. Анаксагор утверждал, что Луна получает свет от Солнца, и правильно объяснял солнечные и лунные затмения. За свои научные взгляды Анаксагор был обвинен в безбожии, осужден и изгнан из Афин. Находясь в заключении, Анаксагор занимался проблемой квадратуры круга (гл. 6, § 17). Демокрит приобрел известность и как геометр. Согласно Архимеду, именно Демокрит впервые открыл, что объем пирамиды или конуса равен трети объема призмы или цилиндра с тем же основанием и той же высотой. Демокрит и Анаксагор изложили также основы теории изображения на плоскости пространственных фигур.

Самым знаменитым геометром V в. до н. э. был *Гиппократ Хиосский*, известный больше всего своими трудами, посвященными квадратуре круга («Гиппократовы луночки») и удвоению куба (гл. 6, § 17). Он является также автором первого, до нас не дошедшего систематического сочинения по геометрии, которое, как полагают, содержало материал первых четырех книг «Начал» Евклида. Труды Гиппократа свидетельствуют о том, что еще во второй половине V в. до н. э. к геометрическим доказательствам предъявлялись высокие требования строгости и точности. В конце V в. до н. э. была полностью разработана почти вся планиметрия на основе строгих доказательств. Не была построена лишь теория отношений и пропорций и неполно решена задача о площади круга. Была также разработана известная часть стереометрии. Успехи в развитии математики в V в. до н. э. привели ее к расцвету в IV и III вв. до н. э.

Развитию математики в IV в. до н. э. способствовали существовавшие в то время философские и особенно естественнонаучные школы. Одну из них возглавлял философ-идеалист, идеолог рабовладельческой аристократии, *Платон* (427—347 гг. до н. э.). Он является основателем школы, названной «Академией» по имени той местности вблизи Афин, где он постоянно встречался со своими учениками. Сам Платон не был математиком, но он придавал исключительно важное значение математике. При входе в основанную им Академию была надпись следующего содержания: «Пусть сюда не входит тот, кто не знает геометрии...» Одному из желающих поступить в его школу для изучения философии без знания геометрии Платон сказал: «Уйди прочь! У тебя нет орудия для изучения философии...»

Применение математики к практике Платон и его ученики считали недостойным для аристократов, низменным занятием. Математику Платон ценил только как науку, необходимую для успешных занятий философией, которую платоники считали уделом аристократии и недоступной для простого народа. Нам неизвестно о каких-либо математических открытиях самого Платона, одна-

ко в философских его трудах упоминаются имена математиков и затрагиваются математические вопросы.

Значительно бóльшую роль в развитии древнегреческой геометрии сыграли работы величайшего мыслителя древности — *Аристотеля* (384—322 до н. э.).

Величайшим математиком IV в. до н. э. был *Евдокс Книдский*. Родившись около 408 г. до н. э. в г. Книде, на юго-западе Малой Азии, Евдокс был известен не только как математик, но и как астроном, врач, философ, географ, оратор и общественный деятель. Недаром друзья его называли «Евдокс Знаменитый». В молодости он изучал математику у Архита Тарентского, а затем философию в Академии Платона. При этом, будучи очень бедным, Евдокс жил не в Афинах, а в гавани города Пирея, откуда ежедневно совершал утомительные походы в платоновскую Академию. С помощью некоторых своих друзей он совершил путешествие в Египет, где изучал астрономию у жрецов. По возвращении на родину Евдокс основал в Кизике, на берегу Мраморного моря, собственную школу, сыгравшую крупную роль в истории греческой науки. Среди астрономов Евдокс получил большую известность благодаря описанию звездного неба, восходов и заходов неподвижных звезд. Эти данные он получил с помощью вращающейся модели небесной сферы. Именно Евдоксу принадлежит одна из первых попыток построения теории движения планет. Он составил также постоянный календарь, содержащий данные относительно равноденствий и солнцестояний, а также предсказания погоды. Одно из астрономических произведений Евдокса, «Явления», переложенное на стихи поэтом Аратом (III в. до н. э.), пользовалось успехом в древности и было переведено также на новые языки.

Евдокс первый разработал общую теорию отношений и пропорций, которая была изложена Евклидом в V книге «Начал». Эта теория Евдокса была по достоинству оценена в конце XIX в.

По свидетельству Архимеда, Евдокс разработал один из важнейших методов в математике, так называемый «метод исчерпывания» (предвестник современного метода пределов), с помощью которого он дал первое строгое доказательство формулы объема пирамиды. Ему принадлежит также доказательство теоремы о том, что площади двух кругов относятся как квадраты радиусов.

В самом конце IV в. до н. э. важнейшие математические достижения ученых Древней Греции были систематизированы и изложены в «Началах» Евклида, с которого начинается новый, самый блестящий период развития древнегреческой математики, так называемая александрийская эпоха.

§ 15. АЛЕКСАНДРИЙСКАЯ ЭПОХА. ЕВКЛИД

Известно, что после смерти Александра Македонского его огромная империя распалась. При ее разделе один из греко-македонских полководцев, Птолемей, сын Лага, стал править Егип-

том с новопостроенным городом Александрией. Птолемей основал знаменитый музей (храм муз, покровительниц науки и искусств), ставший высшим культурным и научным учреждением, центром научной мысли эпохи эллинизма. В состав музея входила и богатейшая Александрийская библиотека, насчитывавшая около 700 000 томов (свитков). В Александрии в III — II вв. до н. э. сосредоточились знаменитые математики того времени: Евклид, Эратосфен, Аполлоний. К Александрийской математической школе относится также Архимед, хотя он жил в Сиракузах. В этот период геометрия отделяется от философии и достигает высокого уровня совершенства.

К первым представителям Александрийской школы принадлежит *Евклид*[1], который жил около 300 г. до н. э. Жизнь его мало известна. В одном из своих сочинений математик Папп, живший в Александрии в III — IV вв. н. э., изображает Евклида, как человека исключительно честного, тихого и скромного, которому были чужды гордость и эгоизм. Насколько серьезно и строго он относился к изучению математики, можно судить из следующего рассказа Прокла: царь Птолемей спросил Евклида, нельзя ли найти более короткий и менее утомительный путь к изучению геометрии, чем его «Начала». Евклид ответил: «Нет царской дороги к геометрии!» О преданности Евклида науке говорит и другой рассказ: «Один из тех, кто только что начал учиться у Евклида геометрии, спросил Евклида[2], выучив первое предложение: «А что я смогу заработать, если выучу все это?» Евклид позвал раба и сказал: «Дай ему три обола[3], так как бедняжка хочет заработать деньги своим учением». Из трудов Евклида, кроме «Начал», до нас дошли: 1) «Данные» — задачи, решаемые с помощью геометрической алгебры; 2) «О делении фигур» — задачи на построение; 3) «Феномена» (явления) — астрономическое сочинение; 4) «Оптика». Другие произведения утеряны.

Славу Евклиду создали его «Начала». Первые шесть книг этого труда посвящены планиметрии, VII — X — учению о числе[4], XI — XIII — стереометрии. Некоторые историки математики считают, что по содержанию книги I — IV, VII — IX происходят в основном от ионийской и пифагорейской школ, V и XII — от Евдокса, X и XIII — от Теэтета. Оригинальная рукопись «Начал», которая сохранялась долгое время в Александрийском музее, не дошла до нас. «Начала» распространялись в многочисленных рукописных копиях, которые на протяжении десятков и сотен лет ком-

---

[1] См.: Выгодский М. Я. «Начала» Евклида. — ИМИ 1948, вып I; Маркушевич А. И. О классификации иррациональностей в X книге «Начал» Евклида. — ИМИ, 1949, вып. II.

[2] См.: Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в древней Греции. — ИМИ, 1958, вып. XI, с. 341 и сл.

[3] Обол — мелкая серебряная монета в Древней Греции.

[4] В X книге содержится классификация иррациональностей, получаемых при решении квадратных и биквадратных уравнений.

ментировались, снабжались примечаниями и исправлениями, местами дополнялись и изменялись. Отсюда понятно, почему тексты дошедших до нас рукописных копий не совпадают полностью. Древнейшая из сохранившихся копий принадлежит IX в. «Начала» Евклида были переведены на десятки языков, изданы и переизданы в разных странах много раз. На русском языке «Начала» были изданы три раза в XVIII в. (рис. 59) и четыре раза в XIX в. Последний и самый совершенный перевод с греческого на русский язык был осуществлен советским ученым, профессором Д. Л. Мордухай-Болтовским и опубликован в 1948—1950 гг.

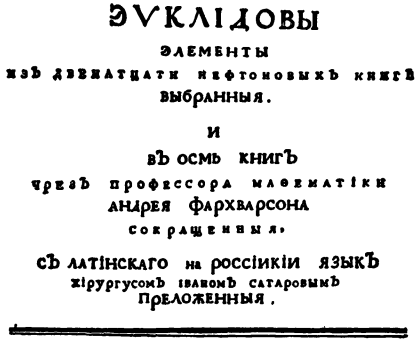

ЭVКЛІДОВЫ
ЭЛЕМЕНТЫ
ИЗЪ ДВЕНАТЦАТИ НЕФТОНОВЫХЪ КНИГЪ
ВЫБРАННЫЯ.
И
ВЪ ОСМЬ КНИГЪ
ЧРЕЗЪ ПРОФЕССОРА МАѲЕМАТІКИ
АНДРЕЯ ФАРХВАРСОНА
СОКРАЩЕННЫЯ.
СЪ ЛАТІНСКАГО НА РОССІЙКІИ ЯЗЫКЪ
ХІРУРГУСОМЪ ІВАНОМЪ САТАРОВЫМЪ
ПРЕЛОЖЕННЫЯ.
НАПЕЧАТАНЫ при САНКТЪПЕТЕРБУРГѢ
въ Морской Академической Типографіи
Первымъ Тисненіемъ 1739 Лѣта.

Рис. 59. Титульный лист из первого русского издания «Начал» Евклида

Начиная с III в. до н. э. и до середины прошлого века «Начала» считались образцом строго логического изложения геометрии. Евклид исходит из определений геометрических понятий и аксиом. Каждое геометрическое предложение формулируется в общих выражениях, затем конкретно указывается на чертеже то, что дано и что требуется доказать или построить. После доказательства следует заключение, повторяющее начальную формулировку и заканчивающееся словами: «что и требовалось доказать» или «что и требовалось сделать».

В «Началах» Евклид придерживается аристотелевских принципов построения науки. Величайший философ древности — Аристотель жил и творил в период, непосредственно предшествовавший «Началам» Евклида. В трудах Аристотеля разъясняется сущность научных определений, аксиом и доказательств. Согласно Аристотелю, одно определение (например, квадрата) не говорит еще о существовании определяемого. Существование следует доказать. Доказательством же существования служит построение. Именно эта и другие установки Аристотеля нашли свое отражение в «Началах» Евклида. Как и Аристотель, Евклид обозначает величины буквами.

На протяжении многих столетий до XIX в. геометрия изучалась в школах по «Началам» Евклида. Наши современные учебники имеют много общих черт с «Началами»: планиметрия и стереометрия излагаются раздельно, каждая из них примерно в том же порядке, что и у Евклида; теоремам предшествуют определения и аксиомы. Многие теоремы, изложенные в современных учебниках, по содержанию совпадают с теми, которые имеются в «Началах», методы доказательства в большинстве случаев те же. Однако не-

которые различия все же имеются: в «Началах» даже не упоминается о непосредственном измерении площадей и объемов фигур, а только об их сравнении. Так, например, у Евклида нет теоремы о том, что площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту; имеется только теорема о том, что треугольник равновелик половине параллелограмма с тем же основанием и той же высотой. В «Началах» нигде не говорится о числе π и его приближенном значении. Евклид не вычисляет длин, площадей и объемов, а находит посредством геометрических построений соотношения между величинами геометрических фигур. Вот почему и сами слова «длина», «площадь», «объем», которые для нас означают некоторые числа, отсутствуют в «Началах». А поэтому все теоремы и их доказательства излагаются в чисто геометрической форме. Не «квадрат стороны», а «квадрат, построенный на стороне»; не «произведение двух отрезков», а «прямоугольник, построенный на двух отрезках»; «не арифметические или алгебраические действия», а «геометрические построения». Это обстоятельство часто приводит к громоздким формулировкам и способам доказательства. В «Началах» все предложения расположены в виде цепи логических рассуждений и выводов, исходя из простых аксиом и доходя постепенно до сложных теорем. Доказательства проводятся чисто умозрительно, без ссылки на глаз или опыт, прибегая лишь к логическим умозаключениям[1]. В современных школьных учебниках геометрии в отличие от «Начал» прибегают к наглядным приемам, а также к задачам прикладного характера. Тем не менее можно утверждать, что «Начала» наложили на элементарную геометрию и ее преподавание в школе неисчезающий отпечаток[2].

Особо следует отметить, что в «Началах» Евклид отразил три великих открытия, сделанных греческими математиками, а именно: теорию отношения Евдокса, теорию иррациональных Теэтета, теорию пяти правильных многогранников. Это, надо полагать, и считал главной своей целью Евклид, создавая знаменитые «Начала».

§ 16. АРХИМЕД И АПОЛЛОНИЙ ПЕРГСКИЙ

Величайшим математиком древнего мира был Архимед (287—212 до н. э.), живший в Сиракузах на о. Сицилия. (Описание его жизни и деятельности приведены в первой книге[3]). Теоретическими

---

[1] Таков по крайней мере был замысел Евклида. Современная критика обнаружила немало изъянов в логической системе Евклида.

[2] В заключение рекомендуется решить несколько задач § 24.

[3] См.: Глейзер Г. И. История математики в школе. IV—VI классы. М., 1981.

изысканиями в математике он стал заниматься довольно поздно — в возрасте свыше 40 лет. Все его математические работы поражают сочетанием оригинальной мысли, мастерской техникой вычислений и строгостью доказательств. Обилие вычислений отличает его труды от творческих работ других греческих математиков, что сближает его с математиками Востока.

Архимед (античный бюст)

Интересно отметить, что в одном из своих трактатов («О теоремах механики. Метод») Архимед приоткрыл метод поиска своих открытий. Он объясняет, как мысленно взвешивая плоскую фигуру, площадь которой желал выразить математически, и сравнивая ее с другой фигурой, он эвристическим путем приходил к тому, что ставил своей задачей. Но затем он подтверждал свое открытие строгими математическими доказательствами.

В работе «Измерение круга», желая выразить отношение длины окружности к своему диаметру, Архимед заключил окружность между вписанным в нее и описанным около нее шестиугольниками, затем, удваивая число сторон этих многоугольников, сближал их с окружностью.

Для нахождения длины сторон избранного им описанного шестиугольника он взял приближенное значение $\sqrt{3}$. В тексте работы совершенно без пояснения он берет значение этого корня, которое в современной записи выглядит так: $\frac{1351}{780} < \sqrt{3} < \frac{265}{153}$.

Как сказано в комментариях к «Началам» Евклида (пер. Мордухай-Болтовского. М.—Л., 1950, т. III, с. 210—221), надо полагать, что приведенное значение корня Архимед нашел, использовав равенство $3 \cdot 15^2 = 26^2 - 1$. Отсюда $\sqrt{3} = \frac{1}{15}\sqrt{26^2 - 1}$. Корень же из $26^2 - 1$ он вычислил, используя способ древних вавилонян. (Этот способ в современных символах можно выразить так: $\sqrt{A} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$, где a — грубо приближенное значение корня, например: $\sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{5}{2}\right) = 2\frac{1}{4}$). Используя взятое значение корня из трех, Архимед определяет через радиус длину стороны правильного шестиугольника (описанного, а также и вписанного). Затем, последовательно удваивая число сторон, находит длины сторон двенадцатиугольников, дальше — длины сторон

Архимед и его ученики (с картины Рафаэля)

многоугольников с 24, 48 и, наконец, 96 углами. В результате он получил следующее выражение: $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$. (Запись дана в современных обозначениях). Арифметическое среднее значение верхней и нижней границ дает $\pi \approx 3{,}1419$. Истинное значение этого числа 3,14159..., т. е. неточность, какая получилась в расчетах Архимеда, допущена лишь в четвертом десятичном знаке.

Велика заслуга Архимеда в применении так называемого «метода исчерпывания» и «атомистического метода», которыми он умело пользовался при нахождении площадей и объемов фигур. Эти методы впоследствии оказали огромное влияние на работы Кеплера и Лейбница.

В связи с применением «атомистического метода» Архимеду потребовалось находить суммы членов некоторых прогрессий. Так он нашел способ суммировать квадраты чисел натурального ряда:

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2,$$

а также установил, как выразить сумму бесконечно убывающей прогрессии:

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots .$$

Архимед первым доказал теорему, которая позволяет вычислять точно площади любых треугольников, если известны их стороны:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Эту формулу называют формулой Герона, по-видимому, вследствие того, что Герон нередко обращался к ней в своих работах.

Древний писатель *Плутарх* так высказался о математических открытиях Архимеда: «Во всей геометрии нет теорем более трудных и более глубоких, нежели теоремы Архимеда.

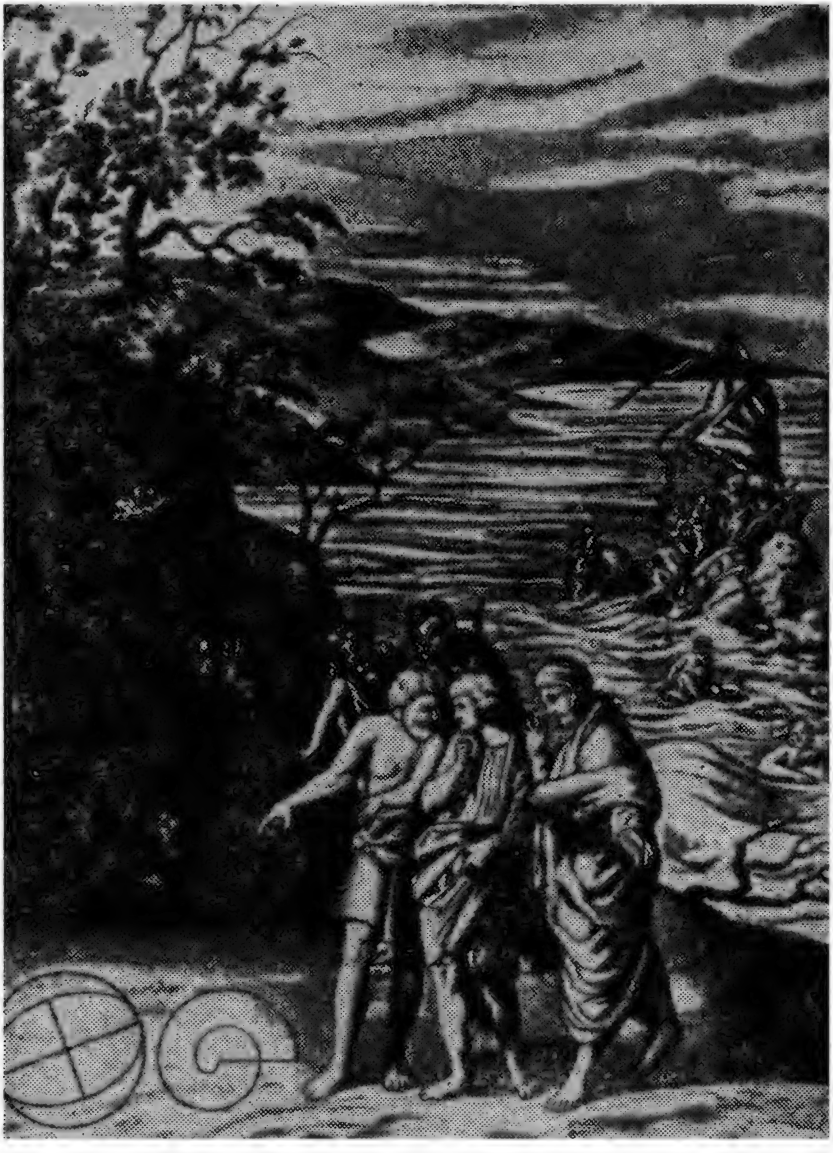
Мне самому всегда казалось, когда я впервые знакомился с его математическими предложениями, что они до того трудны, что ум человеческий не в состоянии найти им доказательства. Однако когда узнаешь, как сам Архимед их доказывает, то тебе кажется, будто ты сам нашел это доказательство — до того оно просто и легко»[1].

Труды Архимеда поражают нас своим разнообразием. Математик и инженер, механик и астроном, практик и теоретик, он заложил первый камень в фундамент современной математической физики, он явился предшественником современного математического анализа.

Третьим после Евклида и Архимеда выдающимся геометром Александрийской эпохи был *Аполлоний Пергский* (около 265—170 гг. до н. э.). Его труд о конических сечениях в восьми книгах (до нас дошло только 3) — это трактат об эллипсе, параболе и гиперболе, т. е. кривых, которые получаются при сечении конуса различно расположенными плоскостями. Все названия этих кривых даны Аполлонием. Он первым в явном виде высказал требование выполнять геометрические построения только с помощью линейки без делений и циркуля.

После Аполлония в Древней Греции не было крупных открытий в области геометрии. Это объясняется влиянием политических и экономических факторов: войны, разорение эллинистических стран, общий экономический и политический распад античного общества. Труды Архимеда и Аполлония считались слишком трудными, они не читались, и часть их со временем была утеряна. Были и другие причины, относящиеся к внутреннему развитию самой математики: трудность и громоздкость геометрической алгебры, отсутствие математической символики и резкое отделение геометрии от арифметики. Тем не менее развитие геометрии, хоть и было замедлено, не было приостановлено: в I — IV вв. вырабатываются вычислительные методы и развивается прикладная геометрия в трудах Герона Александрийского и др., дополняется плоская геометрия, развивается сферическая и плоская тригонометрия и геометрия на сфере в трудах Гиппарха, Менелая, Паппа, Птолемея; зарождается новая алгебра в трудах Диофанта. Однако дальнейшего развития все эти новые ростки греческой матема-

[1] Цит. по кн.: Колосов А. А. Книга для внеклассного чтения по математике для учащихся IX класса. М., 1960.



Математики Древней Греции (из ранних изданий работ Архимеда)

тики не получили, так как в V в. прекратила свое существование Западная Римская империя и вместе с ней пришла в упадок вся античная культура. Лишь в XVII в. в геометрии появляются существенно новые идеи и методы.

§ 17. ТРИ ЗНАМЕНИТЫЕ ЗАДАЧИ ДРЕВНОСТИ

Одной из древнейших и самых популярных математических задач, занимавшей умы людей на протяжении 3—4 тысячелетий, является задача о *квадратуре круга*, т. е. о построении с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу. Если обозначить радиус круга через r, то речь будет идти о построении квадрата, площадь которого равна πr^2, а сторона равна $r\sqrt{\pi}$. Теперь известно; что число π — отношение окружности к своему диаметру — число иррациональное, оно выражается бесконечной непериодической десятичной дробью 3,141592... Можно вычислить приближенное значение π (и корня квадратного из π), удовлетворяющее тем или иным практическим потребностям. Однако не в практическом отношении интересовала людей задача о квадратуре круга, а интересовала принципиальная ее сторона: возможно ли точно решить эту задачу, выполняя построение с помощью циркуля и линейки?[1]

Следы задачи о квадратуре круга можно усмотреть еще в древнеегипетских и вавилонских памятниках II тысячелетия до н. э. Однако непосредственная постановка задачи о квадратуре круга встречается впервые в греческих сочинениях V в. до н. э. В своем произведении «О изгнании» Плутарх рассказывает, что философ и астроном Анаксагор (500—428 до н. э.), находясь в тюрьме, отгонял печаль размышлениями над задачей квадратуры круга. В комедии «Птицы» (414 г. до н. э.) знаменитый греческий поэт Аристофан, шутя на тему о квадратуре круга, вкладывает в уста астронома Метона следующие слова:

Возьму линейку, проведу прямую,
И мигом круг квадратом обернется,
Посередине рынок мы устроим,
А от него уж улицы пойдут —
Ну, как на Солнце! Хоть оно само
И круглое, а ведь лучи прямые!..

Эти стихи говорят о том, что задача уже была к тому времени очень популярной в Греции. Один из современников Сократа — софист Антифон считал, что квадратуру круга можно осуществить следующим образом: впишем в круг квадрат и, разделяя пополам дуги, соответствующие его сторонам, построим правильный вписанный восьмиугольник, затем шестнадцатиугольник и т. д., пока не получим многоугольник, который в силу малости сторон сольется с окружностью. Но так как можно построить квадрат, равновеликий любому многоугольнику (см. гл. 6, § 20), то и круг можно

[1] См.: Рудио Ф. О квадратуре круга / Пер. с нем. М. — Л., 1936.

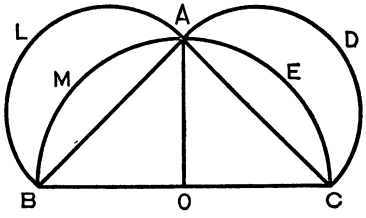


Рис. 60

квадрировать. Однако уже Аристотель указал, что это будет только приближенное, но не точное решение задачи, так как никогда многоугольник не может совпасть с кругом.

Квадратурой круга занимался также самый знаменитый геометр V в. до н. э. — Гиппократ Хиосский. У многих занимавшихся этой задачей возникло сомнение, возможно ли вообще построить прямолинейную фигуру, равновеликую криволинейной. Эта возможность была доказана Гиппократом, построившим лунообразные фигуры (рис. 60), известные под названием «гиппократовых луночек». В полукруг с диаметром $|BC|$ вписан равнобедренный прямоугольный треугольник BAC ($|BA| = |AC|$). На $|AB|$ и $|AC|$, как на диаметрах, описываются полуокружности. Фигуры-мениски $ALBM$ и $ADCE$, ограниченные круговыми дугами, и называются луночками.

По теореме Пифагора имеем:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 = 2|AC|^2. \qquad (1)$$

Отношение $\frac{S_1}{S_2}$ площадей кругов или полукругов $BMAEC$ и $AECD$ равно, как впервые доказал сам Гиппократ, отношению квадратов соответствующих диаметров $\frac{|BC|^2}{|AC|^2}$, которое в силу (1) равно 2. Итак, площадь сектора OAC равна площади полукруга, построенного на диаметре $|AC|$. Если из обеих этих равных площадей вычесть общую площадь сегмента ACE, то и получим, что площадь треугольника AOC равна площади луночки $ADCE$, или сумма площадей обеих луночек равна площади равнобедренного треугольника BCA. Гиппократ нашел и другие луночки, допускающие квадратуру[1], и продолжал свои изыскания в надежде дойти до квадратуры круга, что ему, конечно, не удалось.

Различные другие, продолжавшиеся в течение тысячелетий попытки найти квадратуру круга неизменно оканчивались неудачей. Лишь в 80-х годах XIX в. было строго доказано, что квадратура круга с помощью циркуля и линейки невозможна[2].

---

[1] Сложный вопрос о том, какие луночки квадрируемы, впервые исчерпывающим образом решил Н. Г. Чеботарев.

[2] На одном из внеклассных занятий старшеклассников учитель сможет рассказать учащимся об истинной природе числа π. Первое строгое доказательство иррациональности этого числа было дано на основе работы И. Г. Ламберта 1766 г. математиком А. М. Лежандром. Это доказательство, однако, еще не исключало возможности квадратуры круга, так как известны иррациональные числа, которые могут быть построены с помощью циркуля

Задача о квадратуре круга становится разрешимой, если применять, кроме циркуля и линейки, еще другие средства построения. Так, еще в IV в. до н. э. греческие математики Динострат и Менехм пользовались для решения задачи одной кривой, которая была найдена еще в V в. до н. э. Гиппием Элидским. Однако ученых Древней Греции и их последователей такие решения, находящиеся за пределами применения циркуля и линейки, не удовлетворяли. Будучи вначале чисто геометрической задачей, квадратура круга превратилась в течение веков в исключительно важную задачу арифметико-алгебраического характера, связанную с числом π, и содействовала развитию новых понятий и идей в математике.

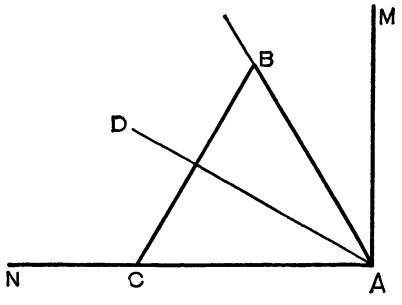


Рис. 61

* *
*

Знаменитой была в древности и задача о *трисекции угла* (от латинских слов tria — три и sectio — рассечение, разрезание), т. е. о разделении угла на три равные части с помощью циркуля и линейки. В некоторых частных случаях это легко удается сделать. Так, деление прямого угла на три равные части умели производить еще пифагорейцы, основываясь на том, что в равностороннем треугольнике каждый угол равен 60°. Пусть требуется разделить на три равные части прямой угол MAN (рис. 61). Откладываем на полупрямой $|AN)$ произвольный отрезок $|AC|$, на котором строим равносторонний треугольник ACB. Так как угол CAB равен 60°, то $\widehat{BAM} = 30°$. Построим биссектрису $|AD|$ угла CAB, получаем искомое деление прямого угла MAN на три равных угла: $\widehat{NAD}$, $\widehat{DAB}$, $\widehat{BAM}$.

Задача о трисекции угла оказывается разрешимой и при неко-

и линейки (хотя бы $\sqrt{2}$). В XIX в. было установлено: для того чтобы некоторое число могло быть построено при помощи циркуля и линейки, оно должно быть корнем алгебраического уравнения, т. е. уравнения вида

$$x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \ldots + a_k = 0, \qquad (1)$$

где все коэффициенты рациональны, k — натуральное число. Всякое число, являющееся корнем уравнения (1), называется алгебраическим. Таким образом, выяснилось, что невозможность квадратуры была бы установлена, если бы удалось доказать, что число π трансцендентное. Пользуясь работой Ш. Эрмита 1873 г., Ф. Линдеман доказал трансцендентность числа π в 1882 г. Так была, наконец, решена тысячелетняя задача о квадратуре круга.

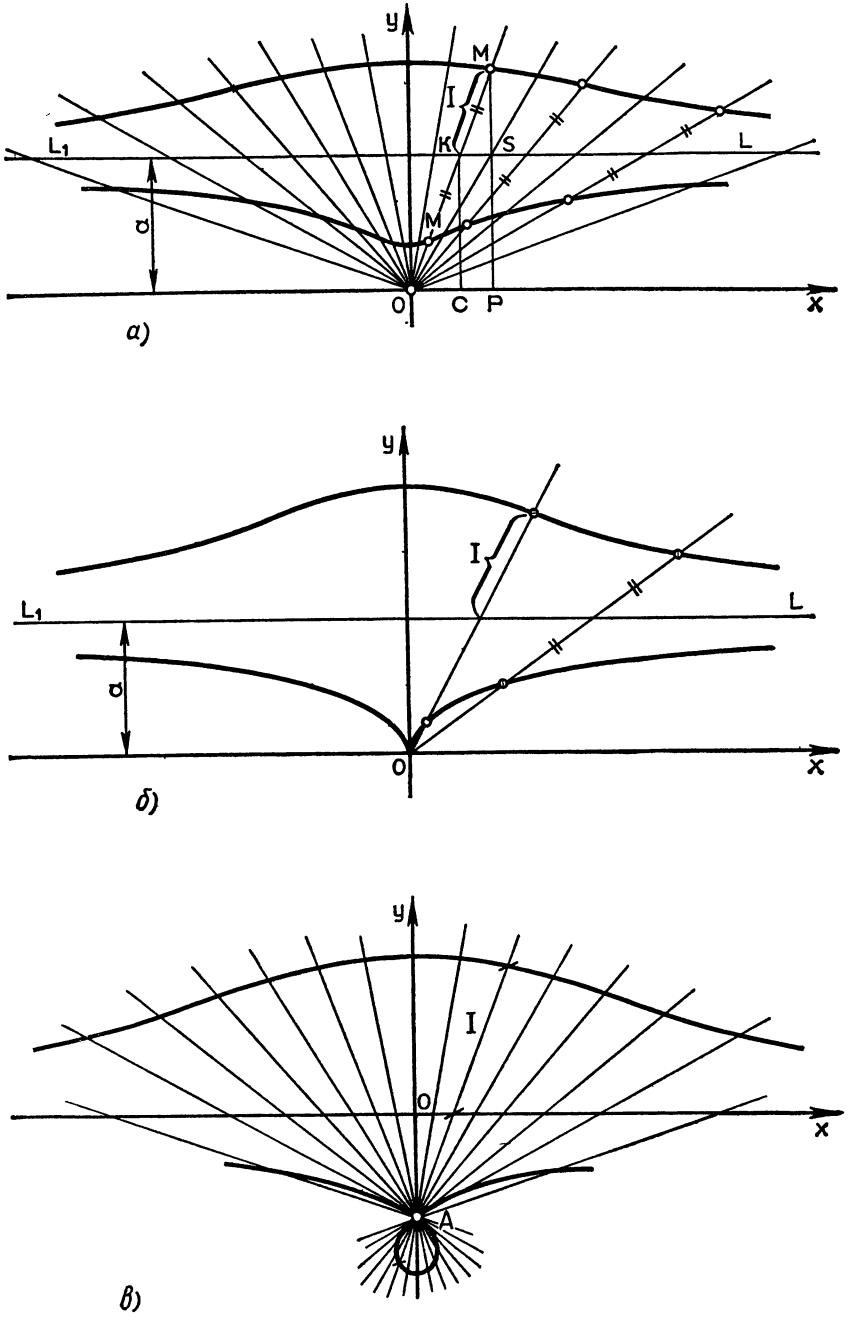


Рис. 62, *а*, *б*, *в*: конхоида Никомеда

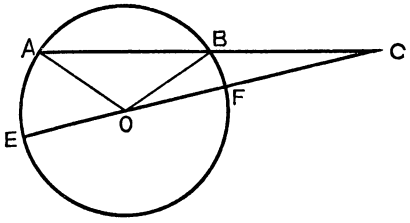


Рис. 63

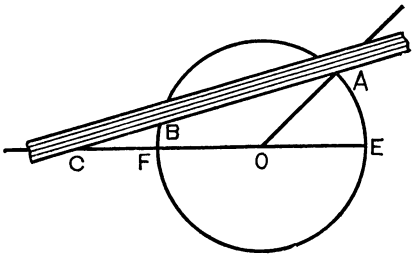


Рис. 64

торых других частных значениях угла (например, для углов в $\frac{90^\circ}{2^n}$, n — натуральное число), однако *не в общем случае*, т. е. любой угол невозможно разделить на три равные части с помощью только циркуля и линейки. Это было доказано лишь в первой половине XIX в.

Задача о трисекции угла становится разрешимой и в общем случае, если не ограничиваться в геометрических построениях одними только классическими инструментами, циркулем и линейкой. Попытки решения задачи с помощью инструментов и средств были предприняты еще в V в. до н. э. Так, например, Гиппий Элидский, знаменитый софист, живший около 420 г. до н. э., пользовался для трисекции угла квадратрисой. Александрийский математик Никомед (II в. до н. э.) решил задачу о трисекции угла с помощью одной кривой, названной *конхоидой*[1] Никомеда (рис. 62), и дал описание прибора для черчения этой кривой.

Интересное решение задачи о трисекции угла дал Архимед в своей книге «Леммы»[2], в которой доказывается, что если продолжить хорду $|AB|$ (рис. 63) окружности радиуса r на отрезок $|BC| = r$ и провести через C диаметр $|FE|$, то дуга BF будет втрое меньше дуги AE. Действительно, на основе теорем о внешнем угле треугольника и о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника имеем:

$$\widehat{AOE} = \widehat{OAB} + \widehat{ACO},$$

$$\widehat{OAB} = \widehat{ABO}, \quad \widehat{ACO} = \widehat{BOC},$$

значит,

$$\widehat{AOE} = 3 \cdot \widehat{BOC}.$$

Отсюда следует так называемый способ «вставки» для деления на три равные части угла AOE. Описав окружность с центром O

[1] См.: Савелов А. А. Плоские кривые. М., Физматгиз, 1960.

[2] Эта книга до нас не дошла. Сохранилась лишь арабская ее обработка и латинский перевод этой обработки.

и радиусом $|OE| = |OA|$, проводим диаметр $|EF|$. Линейку CB, на которой нанесена длина $|CB|$ радиуса r (например, с помощью двух штрихов), прикладываем и двигаем так, чтобы ее точка C скользила по продолжению диаметра (EF), а сама линейка все время проходила бы через точку A окружности, пока точка B линейки не окажется на окружности. Тогда угол BCF и будет искомой третьей частью угла AOE (рис. 64). Как видно, в этом приеме используется вставка отрезка CB между продолжением диаметра EF и окружностью так, чтобы продолжение отрезка CB прошло через заданную точку A окружности. В указанном выше построении применяется, помимо циркуля, не просто линейка как инструмент для проведения прямых, а линейка с делениями, которая дает длину определенного отрезка.

* * *

Удвоение куба — так называется третья классическая задача древнегреческой математики. Эта задача наряду с двумя первыми сыграла большую роль в развитии математических методов.

Задача состоит в построении куба, имеющего объем, вдвое больший объема данного куба. Если обозначить через a ребро данного куба, то длина ребра x искомого куба должна удовлетворять уравнению

$$x^3 = 2a^3, \text{ или } x = a\sqrt[3]{2}.$$

Задача является естественным обобщением аналогичной задачи об удвоении квадрата, которая решается просто: стороной квадрата, площадь которого равна $2a^2$, служит отрезок длиной $a\sqrt{2}$, т. е. диагональ данного квадрата со стороной a. Наоборот, удвоение куба — задача не простая, так как ребро куба, объем которого равен $2a^3$, т. е. отрезок x, равный $a\sqrt[3]{2}$, не может быть построен с помощью циркуля и линейки. Однако это было доказано лишь в первой половине XIX в.

Задача об удвоении куба носит также название «делосской задачи» в связи со следующей легендой.

На острове Делос (в Эгейском море) распространилась эпидемия чумы. Когда жители острова обратились к оракулу[1] за советом, как избавиться от чумы, они получили ответ: «Удвойте жертвенник храма Аполлона». Сначала они считали, что задача легка. Так как жертвенник имел форму куба, они построили новый жертвенник, ребро которого было в два раза больше ребра старого жертвенника. Делосцы не знали, что таким образом они увеличили объем не в 2 раза, а в 8 раз. Чума еще больше усилилась, и в ответ на вторичное обращение к оракулу последний посоветовал: «Получ-

[1] Оракул — прорицание, якобы исходившее от божества и передававшееся жрецами.

ше изучайте геометрию...» Согласно другой легенде, бог приписал удвоение жертвенника не потому, что ему нужен вдвое больший жертвенник, а потому, что хотел упрекнуть греков, «которые не думают о математике и не дорожат геометрией».

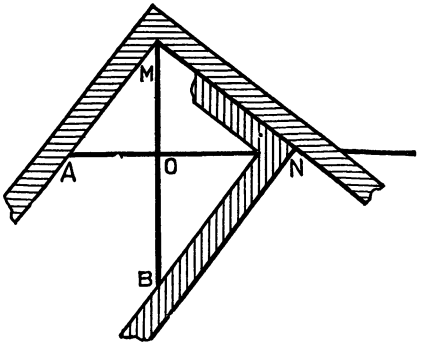


Рис. 65

Задачей удвоения куба еще в V в. до н. э. занимался Гиппократ Хиосский, который впервые свел ее к решению следующей задачи: построить «два средних пропорциональных» отрезка x, y между данными отрезками a, b, т. е. найти x и y, которые удовлетворяли бы следующей непрерывной пропорции:

$$a : x = x : y = y : b. \qquad (1)$$

Суть одного механического решения задачи об удвоении куба, относящегося к IV в. до н. э., основано на методе двух средних пропорциональных. Отложим на стороне прямого угла отрезок $|AO| = a$, где a — длина ребра куба (рис. 65), а на другой его стороне — отрезок $|OB| = 2a$. На продолжениях сторон прямого угла стараемся найти такие точки M и N, чтобы (AM) и (BN) были перпендикулярны к (MN); тогда $|OM|(x)$ и $|ON|(y)$ будут двумя средними пропорциональными между отрезками $|AO|$ и $|BO|$. Для этого устраивается угольник с подвижной линейкой. Линейку располагают так, как показано на рисунке.

Имеем:

$$|AO| : |OM| = |OM| : |ON| = |ON| : |OB|,$$

или

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

Отсюда

$$x^2 = ay; \quad y^2 = 2ax,$$

или

$$x^4 = a^2y^2; \quad a^2y^2 = 2a^3x,$$

т. е.

$$x^4 = 2a^3x; \quad x^3 = 2a^3.$$

Это значит, что отрезок $|OM|$ искомый.

Архит Тарентский дал интересное стереометрическое решение «делосской задачи». После него, кроме Евдокса, дали свои решения Эратосфен, Никомед, Аполлоний, Герон, Папп и др.

Решение вышеизложенных трех задач долго разыскивалось и безрезультатно лишь потому, что ставились условия применения только циркуля и линейки. Не поддаваясь решению, эти пробле-

мы привели к созданию новых весьма замечательных направлений математической мысли, о которых учащиеся могут узнать в старших классах, на занятиях в кружке.

§ 18. СТО ДОКАЗАТЕЛЬСТВ (ИЗ ИСТОРИИ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА)

Теорема Пифагора издавна широко применялась в разных областях науки, техники и практической жизни.

О ней писали в своих произведениях римский архитектор и инженер Витрувий, греческий писатель-моралист Плутарх, греческий ученый III в. Диоген Лаэрций, математик V в. Прокл и многие другие. Легенда о том, что в честь своего открытия Пифагор принес в жертву быка или, как рассказывают другие, сто быков, послужила поводом для юмора в рассказах писателей и в стихах поэтов. Так, например, немецкий писатель-романист А. Шамиссо, который в начале XIX в. участвовал в кругосветном путешествии на русском корабле «Рюрик», написал следующие стихи[1]:

Пребудет вечной истина, как скоро
Ее познает слабый человек!
И ныне теорема Пифагора
Верна, как и в его далекий век.

Обильно было жертвоприношенье
Богам от Пифагора. Сто быков
Он отдал на закланье и сожженье
За света луч, пришедший с облаков.

Поэтому всегда с тех самых пор,
Чуть истина рождается на свет,
Быки ревут, ее почуя, вслед.

Они не в силах свету помешать,
А могут лишь, закрыв глаза, дрожать
От страха, что вселил в них Пифагор.

Поэт Генрих Гейне (1797—1856), известный своими антирелигиозными взглядами и язвительными насмешками над суевериями, в одном из своих произведений высмеивает «учение» о переселении душ следующим образом:

«Кто знает! Кто знает! Душа Пифагора поселилась, быть может, в беднягу — кандидата, не сумевшего доказать теоремы Пифагора и поэтому провалившегося на экзамене, тогда как в его экзаменаторах обитают души тех самых быков, которых некогда Пифагор принес в жертву бессмертным богам, обрадованный открытием своей теоремы».

История Пифагоровой теоремы начинается задолго до Пифа-

[1] См.: Литцман В. Теорема Пифагора / Пер. с нем. В. С. Бермана. М., 1960, с. 8 и сл.

гора[1]. На протяжении веков были даны многочисленные разные доказательства теоремы Пифагора. Приведем некоторые из них.

Одно из древнейших доказательств дано, как полагает Прокл, Евклидом и изложено им в «Началах». Как формулировка, так и доказательство теоремы Пифагора имеют у Евклида чисто геометрический характер. На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника BAC (рис. 66) он строит соответствующие квадраты и доказывает, что квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах, следующим образом:

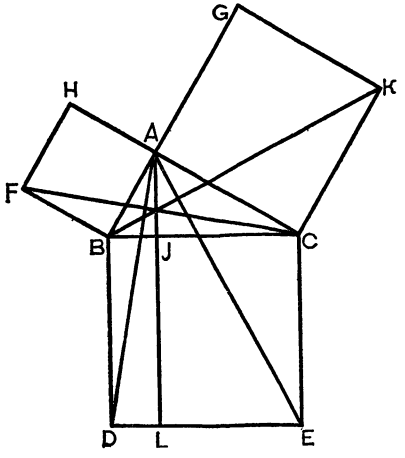


Рис. 66

$$\widehat{DBC} = \widehat{FBA},$$

$$\widehat{DBC} + \widehat{ABC} = \widehat{FBA} + \widehat{ABC},$$

значит,

$$\widehat{DBA} = \widehat{FBC}.$$

Отсюда следует, что треугольники ABD и FBC равны (по двум сторонам и углу, заключенному между ними). Но треугольник ABD равновелик половине прямоугольника $BDLJ$ ($|BD|$ — общее основание, $|LD|$ — общая высота), а треугольник FBC составляет половину квадрата $HFBA$ ($|FB|$ — общее основание, $|AB|$ — общая высота). Значит, квадрат $HFBA$ равновелик прямоугольнику $BDLJ$. Аналогично доказывается, что

Рис. 67. Чертеж к теореме Пифагора в средневековой арабской рукописи

[1] См. гл. 4, § 15, 31.

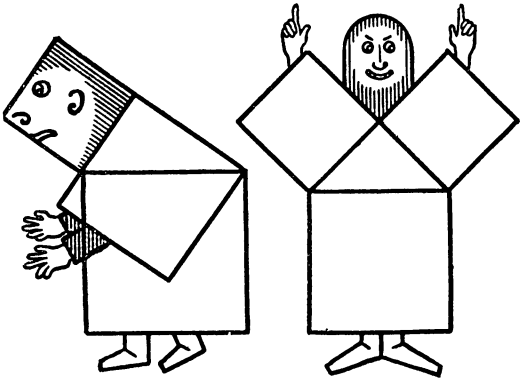


Рис. 68. Чертеж к теореме Пифагора. Ученические шаржи

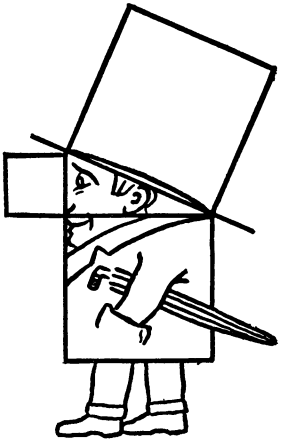


Рис. 69. Чертеж к теореме Пифагора Шарж из учебника XVI в.

квадрат $GKCA$ равновелик прямоугольнику $CELJ$, откуда и следует, что сумма площадей квадратов $HFBA$ и $GKCA$, построенных на катетах, равна площади квадрата $EDBC$, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника ABC (рис. 66).

Доказательство теоремы Пифагора считалось в кругах учащихся средних веков очень трудным и называлось иногда Pons asinorum — ослиный мост или elefuga — бегство убогих[1], так как некоторые «убогие» ученики, не имевшие серьезной математической подготовки, бежали от геометрии. Слабые ученики, заучившие теоремы наизусть без понимания и прозванные поэтому «ослами», не были в состоянии преодолеть теорему Пифагора, служившую для них вроде непроходимого моста. В связи с чертежом 67, сопровождающим доказательство Евклида, и другими, ему подобными, теорему Пифагора учащиеся называли также «ветряной мельницей», составляли стишки вроде

Пифагоровы штаны
во все стороны равны,

рисовали карикатуры вроде тех, которые воспроизведены на рисунке 68. В одном учебнике появился и рисунок 69.

Многие из данных после Евклида доказательств теоремы Пифагора основываются на том, что равносоставленные фигуры равновелики: квадраты, построенные на катетах и гипотенузе, разбиваются на многоугольники так, что каждому многоугольнику

[1] Эти названия давались также теореме о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника.

из состава квадрата на гипотенузе соответствует равный многоугольник одного из квадратов на катетах. В таких случаях достаточно посмотреть на чертеж, чтобы понять все доказательство. Багдадский математик и астроном X в. ан-Найризий (латинизированное имя — Анариций) дал, например, такое доказательство (рис. 70).

На доказательстве Анариция основано и появившееся в учебниках XIX и XX вв. следующее разложение фигур на попарно равные части (рис. 71).

Другие доказательства основаны на том, что, прибавляя к квадратам на катетах и к квадрату на гипотенузе равные фигуры, получаем равновеликие фигуры. Например, на рисунке 72 к Пифагоровой фигуре прибавлены треугольники 2 и 3, равные исходному треугольнику 1. Доказательство теоремы Пифагора сводится тут к доказательству равновеликости шестиугольников $DABGFE$ и $CAJKHB$. Последнее видно из того, что (DG) делит пополам первый, (CK) — второй шестиугольник. И если повернуть половину первого шестиугольника $DABG$ вокруг A на 90°, то она совпадает с $CAJK$, половиной второго шестиугольника.

А вот еще одно доказательство (рис. 73). Тут Пифагорова фигура достроена до

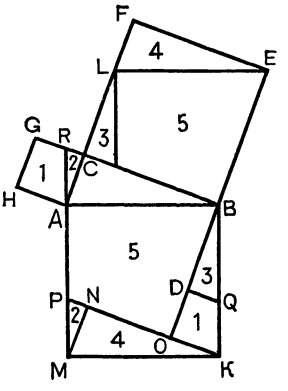


Рис. 70

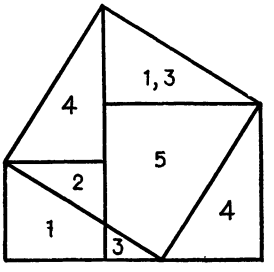


Рис. 71

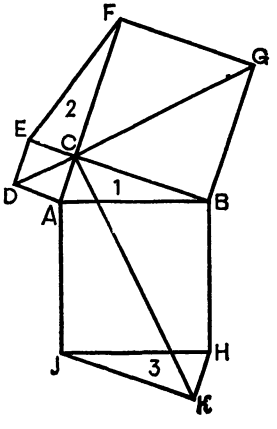


Рис. 72

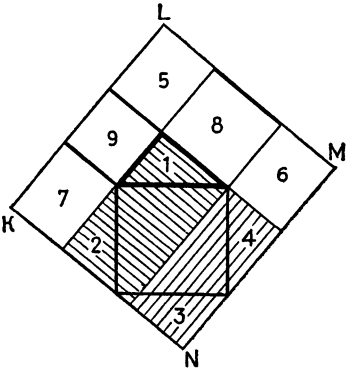


Рис. 73

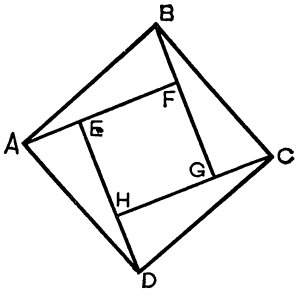


Рис. 74

прямогоугольника $KLMN$. Отнимая многоугольники 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9, получаем квадрат, построенный на гипотенузе, а отнимая из того же прямоугольника фигуры, равновеликие только что перечисленным (5; 6; 7 и заштрихованные прямоугольники), получаем квадраты 8 и 9, построенные на катетах, и доказываем, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов 8 и 9.

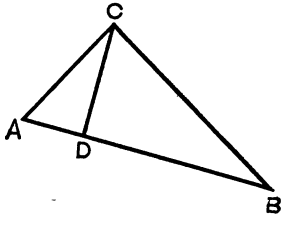


Рис. 75

В некоторых случаях при доказательствах используют алгебраические тождества[1]. Так, выполнив чертеж (рис. 74) и записав площадь квадрата через его элементы, квадрат гипотенузы (стороны большего квадрата) выразится через сумму квадратов катетов треугольника.

Немало доказательств теоремы Пифагора основано на теории подобия. В XIX—XX вв., идя по следам Лежандра, большинство авторов школьных учебников применяют арифметику и алгебру в изложении элементарной геометрии. Так, например, в «Элементарной геометрии» профессора А. Ю. Давидова[2] изложено следующее доказательство (рис. 75).

Из подобия треугольников ACD и CAB следует:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AD|}, \text{ или } |AC|^2 = |AB| \cdot |AD|. \qquad (1)$$

Из подобия же треугольников ABC и DCB следует:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|BD|}, \text{ или } |BC|^2 = |AB| \cdot |BD|. \qquad (2)$$

Сложив почленно равенства (1) и (2), получим:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|(|AD| + |BD|),$$

т. е.

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2.$$

Это доказательство, излагаемое нередко и в современных учебниках, берет свое начало у Бхаскары (XII в.), оно находится и в «Практической геометрии» Леонардо Фибоначчи и у Валлиса (XVII в.).

---

[1] См. гл. 4, § 15, 31.

[2] Учебник, вышедший первым изданием в 1864 г., десятки раз переиздававшийся в XIX и начале XX в.

§ 19. ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ И СОСТАВЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

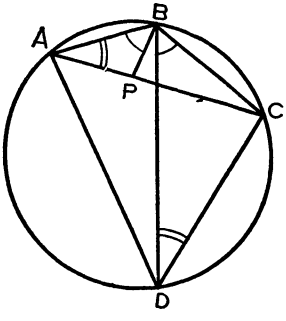


Рис. 76

В третьей книге «Начал» Евклид доказывает, что «у четырехсторонников (вписанных) в кругах противоположные углы вместе равны двум прямым». Эта теорема изучается в школе.

Обратная теорема, которая тоже изучается в школе, отсутствует в «Началах». Она была доказана Клавдием *Птолемеем*[1]. Он же доказал и другое известное предложение, так называемую «теорему Птолемея»[2]: «Прямоугольник, построенный на диагоналях вписанного в круг четырехугольника, равен сумме прямоугольников, построенных на противоположных сторонах». Современная формулировка этой теоремы следующая: произведение диагоналей вписанного в круг четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон (рис. 76).

Для доказательства проведем отрезок $|BP|$ так, чтобы

$$\widehat{ABP} = \widehat{DBC}.$$

Из подобия треугольников ABP и DBC следует:

$$|AB| \cdot |CD| = |AP| \cdot |BD|. \tag{1}$$

Из подобия же треугольников PBC и ADB имеем:

$$|BC| \cdot |AD| = |PC| \cdot |BD|. \tag{2}$$

Складывая почленно равенства (1) и (2), получим:

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|.$$

Основываясь на этой теореме, Птолемей находил по хордам двух дуг хорды их разности и суммы и по хорде какой-нибудь дуги хорду ее половины и таким образом составил свою таблицу хорд.

Пусть в круге данного радиуса R (рис. 77) известны хорды $|AB| = c$, $|AC| = b$ и пусть требуется найти хорду $|BC| = a$, соответствующую разности дуг, стягиваемых хордами $|AC|$ и $|AB|$.

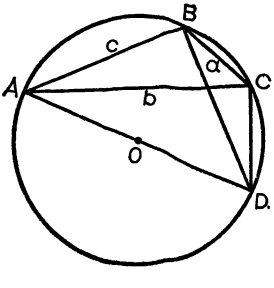


Рис. 77

[1] И впервые введена в элементарную геометрию в 1778 г. Л. Бертраном.

[2] Теорема была, вероятно, известна до Птолемея.

Проведя диаметр $|AD|$ и применяя теорему Птолемея к четырехугольнику $ABCD$, имеем:

$$b \cdot |BD| = c \cdot |CD| + a \cdot 2R.$$

Откуда

$$a = \frac{b \cdot |BD| - c \cdot |CD|}{2R}.$$

Отрезки $|BD|$ и $|CD|$ можно определить по теореме Пифагора, так как они являются катетами прямоугольных треугольников ABD и ACD, в которых известная гипотенуза $|AD| = 2R$ и катеты b и c.

В своих расчетах Птолемей использовал хорды, длина которых была известна из геометрии. Этими хордами были стороны правильных многоугольников, вписанных в круг: треугольника (хорда дуги в 120°), квадрата (90°), шестиугольника (60°), пятиугольника (72°) и десятиугольника (36°). Взяв хорду, соответствующую 120°, и применив свою теорему, Птолемей вычислил хорды дуг 12°, 6°, 3°, $1\frac{1}{2}°$, $\frac{3}{4}°$. Хорду дуги в 1° Птолемей вычислил с большой точностью, показав, что она меньше $\frac{4}{3}$ хорды в $\frac{3}{4}°$ и больше $\frac{2}{3}$ хорды в $\frac{3}{2}°$.

Техника тригонометрических вычислений достигла дальнейшего значительного развития в астрономических трудах индийских ученых V — XII вв. В отличие от Птолемея они вычисляли уже не хорды, а полухорды, линии синуса, основываясь на выражении длин сторон правильных вписанных многоугольников через длину радиуса круга.

О дальнейшем развитии тригонометрии и техники составления таблиц учащиеся узнают в старших классах.

§ 20. ДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАВНОВЕЛИКИХ ФИГУР

Задача деления площадей фигур с помощью прямых, пересекающих их, и превращения одной фигуры в другую путем разрезания и пересоставления их частей возникла еще в древности из потребностей практики, землемерия и архитектуры[1]. В одном из вавилонских текстов дано правило нахождения длины отрезка x, параллельного основаниям a и b тра-

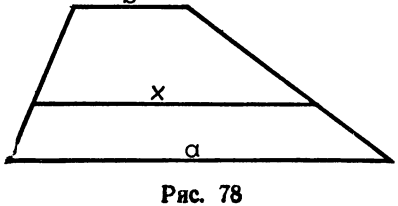


Рис. 78

[1] См.: Кордемский Б. А., Русалев Н. В. Удивительный квадрат. М., 1959.

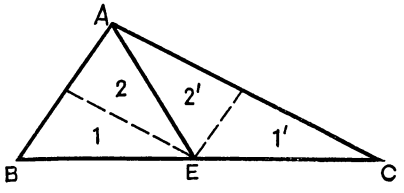


Рис. 79

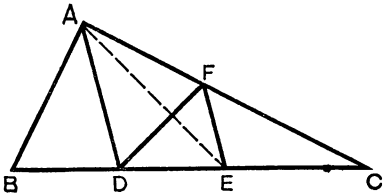


Рис. 80

пеции (рис. 78), если площадь этой трапеции делится отрезком пополам:

$$x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

В сохранившемся на арабском языке сочинении Евклида «О делении фигур» рассматривается вопрос о том, как можно с помощью прямой линии, проходящей через данную точку, разделить пополам или в некотором отношении площадь данного многоугольника. В этом сочинении встречается также вышеуказанная вавилонская задача.

Проблема деления площадей особенно интересовала математиков эпохи Возрождения. Вот (рис. 79) один из простейших способов, применявшихся для деления пополам площади треугольника ABC прямой, проходящей через одну из его вершин, например A: из A проводится медиана $|AE|$. Треугольники BAE и CAE равновелики, так как они равносоставлены, т. е. состоят из попарно равных частей $1 + 2$ и $1' + 2'$.

Автор французских руководств по геометрии Пельтье (1515—1582) так решает (рис. 80) задачу деления пополам треугольника прямой, проходящей через данную точку F стороны AC. Соединяя F с E (серединой BC), проводим $(AD) \parallel (FE)$. Отрезок $|FD|$ искомый, так как

$$S_{DFC} = S_{DEF} + S_{EFC} = S_{AEC} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

В «Началах» содержатся задачи на преобразование площадей, т. е. на построение фигур определенной формы, равновеликих данным фигурам.

Одной из самых простых и удобных для измерения площадей фигур является квадрат. Поэтому издавна появилось стремление превращать любую фигуру в равновеликий квадрат. Евклид, например, ставит и решает задачу о построении квадрата, равновеликого данному многоугольнику.

Для решения этой задачи проще всего исходить из того, что любой многоугольник можно разбить на некоторое число треугольников, а всякий треугольник можно превратить в параллелограмм

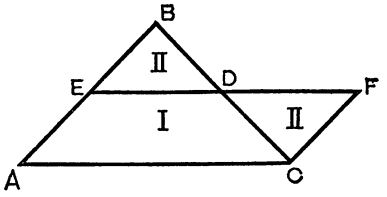


Рис 81

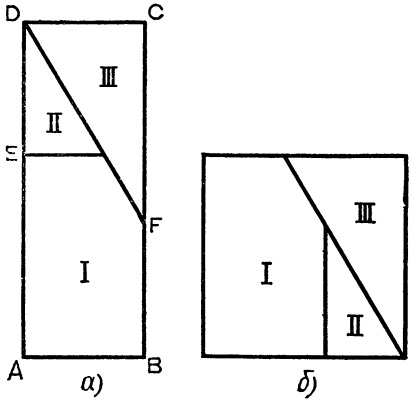


Рис. 82

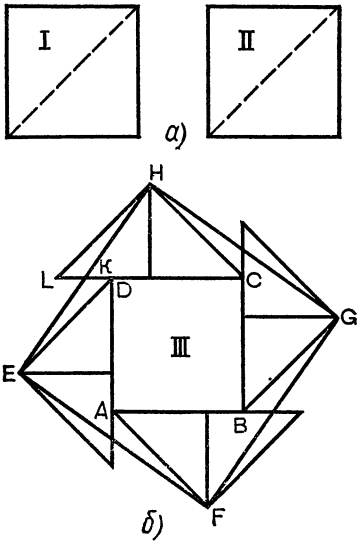


Рис. 83

с тем же основанием и высотой, равной половине высоты треугольника (рис. 81). Параллелограмм легко превратить в прямоугольник. Далее, на рисунке 82 показан пример превращения прямоугольника в квадрат.

Возможность превращения двух квадратов в один квадрат вытекает из многих доказательств теоремы Пифагора, в которых показано, что квадрат на гипотенузе не только равновелик, но и равносоставлен с вместе взятыми двумя квадратами на катетах. В итоге, превращая многоугольник в треугольники, каждый из треугольников в равновеликий ему параллелограмм — прямоугольник — квадрат, складывая затем попарно квадраты, получаем один квадрат, равновеликий исходному многоугольнику. Конечно, на практике нет необходимости проходить всегда через все указанные этапы

Задачи на разрезание фигур на части и конструирование из них других фигур представляли на протяжении веков не только теоретический, но и практический интерес. Они применялись в вопросах землемерия и строительства.

В своей «Книге о геометрических построениях» арабский математик X в. Абу-л-Вафа писал: «В настоящей книге мы займемся разложением фигур; вопрос этот необходим многим практикам и составляет предмет особенных их разысканий. К таким вопросам мы приходим, когда требуется разложить квадраты так, чтобы получились меньшие квадраты, или когда

из нескольких квадратов требуется составить больший квадрат. Ввиду этого мы дадим основные начала, которые относятся к данным вопросам, так как все методы, применяемые рабочими, не основанные на каких-либо началах, не заслуживают доверия и весьма ошибочны».

Вот одна из задач Абу-л-Вафа.

З а д а ч а **40.** «Составить квадрат из двух данных и равных между собою квадратов».

Р е ш е н и е. Разрезав каждый из первых двух квадратов пополам по диагонали (рис. 83), прикладываем гипотенузу каждого из полученных четырех треугольников соответственно к каждой из сторон третьего квадрата. Тогда $HGFE$ — искомый квадрат. Действительно, «выступающий» треугольник HLK равен «внутреннему» треугольнику KED, так как $\widehat{HLK} = \widehat{EDK} = 45°$, $\widehat{HKL} = \widehat{EKD}$, а заключенные между ними стороны LK и KD равны и т. д.

Задачи преобразования равновеликих фигур занимали умы ученых XIX в. и поныне интересуют математиков. В настоящее время они широко могут быть использованы в вопросах рационального раскроя тканей, кожи и т. п.

§ 21. ПРИБОРЫ И ИНСТРУМЕНТЫ В ИЗМЕРЕНИЯХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ. ИЗМЕРЕНИЕ МЕРИДИАНА

Для практических измерений расстояний и высот в землемерии первоначально применялись некоторые примитивные средства: шаг, веревка, деревянный прут и т. п. Для построения прямого угла употреблялась веревка с узлами, делящими ее в отношении 3 : 4 : 5, а позже — деревянный прибор, частично напоминающий современный угольник плотника.

Известно, что в Древнем Египте и Древней Греции строились великолепные храмы и памятники, однако о применявшихся строителями приборах и инструментах, как и вообще об их технических знаниях, до нас дошли очень скудные сведения. На родине Пифагора, на острове Самосе, был еще в 530 г. до н. э. построен для водопровода туннель через гору Кастро, сложенную из известняков. Геродот так описывает самосский туннель: «Это подземный ход, пробитый на высоте полутораста саженей от подножия высокой горы и имеющий два входа по своим концам; весь этот подземный ход имеет семь стадий в длину, восемь футов в вышину и восемь футов в ширину; везде по всей его длине тянется непрерывно водосток двадцати локтей глубины и трех футов ширины, через который бежит в изобилии ключевая вода и по трубам достигает города Самоса. Строителем этого сооружения был Евпалин, сын мегэрца Навстрофа».

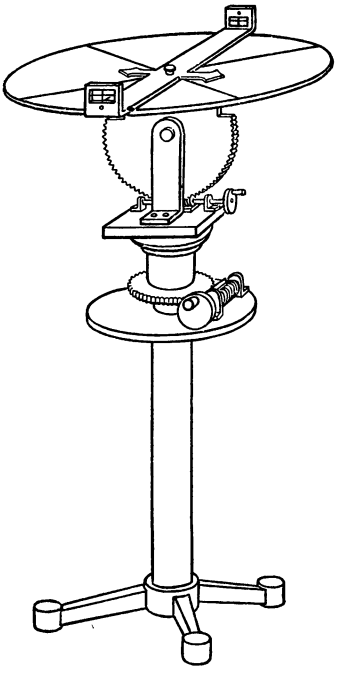


Рис. 84. Диоптр Герона

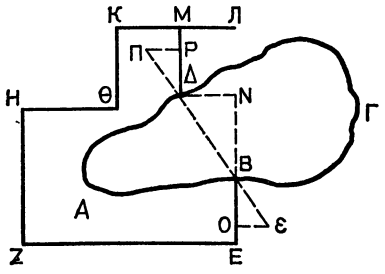


Рис. 85

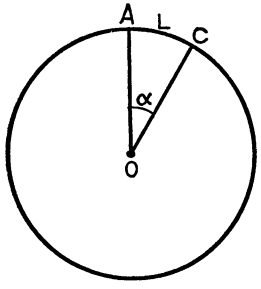


Рис. 86

В конце XIX в. занимавшиеся раскопками в Самосе археологи нашли описанный Геродотом туннель, длина которого 1 км, ширина и высота 2 м. Современный голландский математик и историк математики Ван дер Варден считает, что туннель копали с обоих концов и вместе с тем он оказался почти прямолинейным. Можно предполагать, что строители пользовались прибором вроде диоптра Герона.

В сочинении «О дипотре» Герон изложил правила земельной съемки, фактически основанные на использовании прямоугольных координат. Описанный Героном диоптр представлял собой горизонтальную линейку с двумя смотровыми отверстиями. Поворачивая эту линейку, можно было визировать на плоскости прямые углы. На рисунке 84 изображен реконструированный диоптр Герона. Горизонтальность установки достигалась при помощи сообщающихся сосудов. Вот одна из задач, содержащихся в сочинении Герона.

З а д а ч а **41**. Через гору АВГΔ прорыть прямолинейный туннель с выходами в В и Δ (рис. 85).

Герон так ее решает: через точку В проводится произвольная прямая (ВЕ) и с помощью диоптра строится ломаная ВЕZНΘКЛΔ, звенья которой взаимно перпендикулярны. Далее перемещаем ди-

оптр по прямой (КЛ), пока где-то на стороне прямого угла в точке М не увидим точку Δ. Строим (ΔN) ⊥ (BN). После этого расстояния |ΔN| и |BN| определяются следующим образом:

$$|\Delta N| = |EN| - (|H\Theta| + |KM|); \quad |BN| = (|ZH| + |\Theta K|) - (|BE| + |\Delta M|).$$

При В и Δ строятся прямоугольные треугольники ВОε и ΔРП так, чтобы

$$\frac{|O\varepsilon|}{|OB|} = \frac{|P\Pi|}{|P\Delta|} = \frac{|\Delta N|}{|BN|},$$

после чего гипотенузы этих треугольников |εВ| и |ΠΔ| дают направление, в котором нужно рыть туннель, для того чтобы он был прямолинейным.

Потребность в приборах измерения возникла и в связи с астрономией, с измерением земли и ее меридиана. Еще в VI в. до н. э. у Анаксимандра Милетского, ученика Фалеса, была мастерская, где изготовлялись из дерева разные приборы, в том числе и небесные глобусы. В основу измерения земного меридиана в Древней Греции была положена следующая идея: измерить длину L и амплитуду α некоторой дуги большой окружности, на основе чего можно вычислить длину всей окружности — меридиана (рис. 86). Если верить преданиям, то Пифагор был первым ученым, утверждавшим, что Земля — шар, расположенный в центре Вселенной. В своем произведении «О небе» Аристотель писал: «Математики, вычислявшие длину окружности Земли, утверждают, что ее длина сорок мириад» (т. е. 400 000 стадий). От Аристотеля до величайшего астронома древности — Птолемея были четыре замечательные попытки измерения земного меридиана. О второй из них упоминает в своем «Псаммите» Архимед, который называет число 30 мириад, т. е. 300 000 стадий. Третья попытка была сделана *Эратосфеном* в III в. до н. э. О ней известны некоторые подробности.

Эратосфен Киренский был известен не только как многогранный ученый, математик, географ, астроном, историк, философ и поэт, но и как спортсмен, который достиг замечательных результатов в различных областях спорта, за что получил прозвище «пентатлос», т. е. атлет-пятиборец. Одно время он был директором знаменитой Александрийской библиотеки, что дало ему возможность получить всестороннее образование и собирать необходимые материалы для своей географической карты мира и других работ. Для измерения земного меридиана Эратосфен наметил в качестве двух пунктов земной поверхности (A и C) города Александрию и Сиену. В этом случае $L = 5000$ стадий, $\alpha = 7°12'$, найденная длина меридиана 25 мириад.

В I в. до н. э. ученый *Посидоний*, применяя метод Эратосфена к городам Александрия и Родос, получил для длины земного меридиана 240 000 стадий. Последнее древнегреческое измерение меридиана предпринял *Птолемей* около 150 г. до н. э., его резуль-

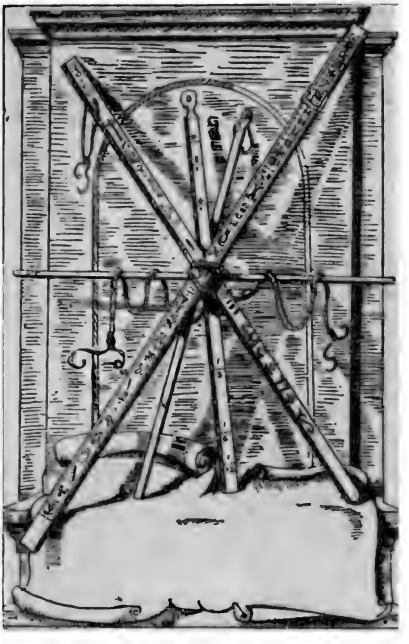


Рис. 87. Прибор для измерения долготы в XVIII в.

тат — 180 000 стадий. Семь веков спустя попытки измерения меридиана возобновились в Багдаде придворными учеными халифа *ал-Мамуна*. В одной из своих работ математик и астроном *Абу-л-Вафа* описал разные приемы измерения расстояний с помощью градуированной доски с вращающимся визиром. Однако лишь с изобретением телескопа (1608), микроскопа и точных угломерных инструментов измерения меридиана стали совершаться с большой степенью точности (рис. 87).

Для измерения в градусах, минутах и секундах дуги между двумя точками Земли, находящимися на одном меридиане, вычисляют разность их широт, определяемых астрономией. Расстояние же между точками в линейной мере, например в километрах, измеряется методом *триангуляции*, изобретенным в начале XVII в. голландским математиком и астрономом В. Снеллиусом. Термин «триангуляция» происходит от латинского слова «triangulum»—треугольник. Дело в том, что вычисление длины дуги меридиана производится путем вычисления у последовательного ряда треугольников длины сторон, покрывающих измеряемое расстояние[1]. В XVIII в. одно из важнейших измерений меридиана было произведено Мешеном и Деламбром.

В первой половине XIX в. в Прибалтике были произведены совместные русско-скандинавские измерения меридиана, которые были затем продолжены на север и на юг. В Прибалтике и Финляндии работами руководил выдающийся русский ученый, академик В. Я. Струве (1793—1864). Измеренная в общей сложности дуга от устья реки Торнео (на Скандинавском полуострове) до Измаила (УССР) составляла 25°20′ и была названа «дугой Струве». Благодаря усилиям ученых разных стран в начале XX века было закончено измерение дуги меридиана протяжением свыше 25° от мыса Игольного (южная оконечность Африки) до озера Танганьика (Восточная Африка). Результаты новых градусных измерений показали среди прочего, что Земля имеет форму, близкую к сфероиду (сплюсну-

[1] См.: Депман И. Я. Возникновение системы мер и способов измерения величин. М., 1956, вып. I, с. 76—77.

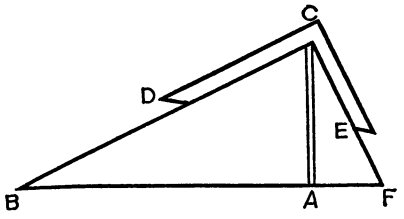


Рис. 88. «Геометрический квадрат»

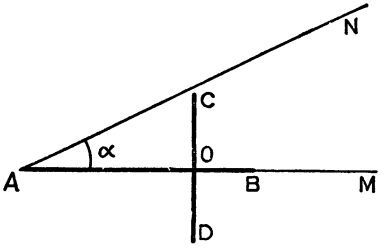


Рис 89 «Жезл Якова»

тому эллипсоиду вращения). Истинную форму Земли, пока еще не вполне выявленную, принято называть геоидом (от греческих слов «ге» — Земля и «ендос» — вид). В последние десятилетия в нашей стране широко развернулись градусные измерения и другие геодезические работы. В настоящее время в СССР разработана новая схема построения триангуляций.

* *
*

В средние века применялись различные геометрические инструменты и приборы, среди них самый простой — так называемый «геометрический квадрат». Он изображен на рисунке 88, взятом из одной «Практической геометрии» середины XVI в.

Пусть требуется найти расстояние $|AB|$. Прикладываем инструмент так, как показано на рисунке. Зная $|AF|$ и $|AC|$ и основываясь на подобии треугольников AFC и ABC, находим:

$$|AB| = \frac{|AC|^2}{|AF|}.$$

Другой очень простой и распространенный в средние века прибор назывался «жезл Якова» или «посох — крест». Он состоял из линейки AB длиной около 1 м (рис. 89), по которой скользит брусок CD, перпендикулярный к AB. Чтобы определить угол $MAN = \alpha$, двигают CD так, чтобы M оказалась на продолжении (AB), а N — на (AC). Тогда $\frac{|CO|}{|AO|} = \operatorname{tg}\alpha$.

Другое применение этого прибора видно на рисунке 90.

При решении геометрических задач на построение обычно пользуются линейкой и циркулем.

Ограничение средств геометрических построений только циркулем и линейкой восходит к древнегреческим памятникам.

Этих ограничений строго придерживается Евклид, хотя в «Началах» названия циркуля и линейки он нигде не упоминает. Циркуль и линейка рассматривались греками всегда совместно как совершенно равноправные, неотделимые друг от друга инструменты.

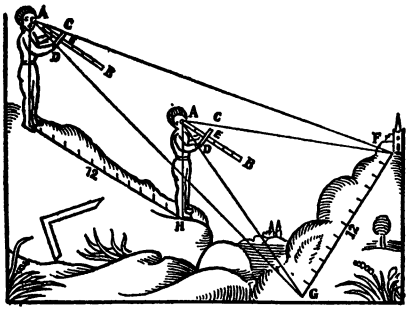


Рис. 90. «Жезл Якова»

Никогда они не ставили вопрос о роли каждого из этих инструментов в отдельности и о преимуществах одного из них.

Абу-л-Вафа (X в.) является автором оригинального сочинения, известного под названием «О геометрических построениях»[1]. В нем впервые проводится систематическое ограничение классических инструментов и ставится условие, чтобы геометрические построения выполнялись с помощью односторонней линейки и циркуля постоянного раствора. Такими построениями пользовались знаменитые живописцы Леонардо да Винчи и Альбрехт Дюрер, их стали применять известный итальянский математик Тарталья и другие ученые. Давно было замечено, что циркуль — более точный инструмент по сравнению с линейкой[2] и что многие геометрические построения можно выполнить одним только циркулем без помощи линейки. Вот несколько примеров.

1. Разделить окружность на шесть равных частей.

2. Разделить окружность на три равные части.

Решение этих задач известно из школьного курса.

З а д а ч а **42**. «Найти точку, диаметрально противоположную данной точке B окружности».

Р е ш е н и е. Отложив от B три дуги радиусом r окружности, найдем искомую точку B' (рис. 91) и заодно длину диаметра окружности.

З а д а ч а **43**. «Через данную точку A внутри круга радиуса r провести хорду, делящуюся в этой точке пополам» (требуется построить концы B, C искомой хорды).

Р е ш е н и е. Предположив задачу решенной (рис. 92), констатируем, что $OBDC$ — ромб, сторона которого равна радиусу окружности. Поэтому для построения проводим из A окружность радиусом $|AO|$ и строим точку D, диаметрально противоположную точке O. Из точки D радиусом r делаем засечку в искомых точках B и C.

Тот факт, что многие задачи поддаются решению с помощью одного только циркуля и что циркуль является более совершенным инструментом, чем линейка, послужил толчком к постановке общей проблемы: какие задачи на построение можно решить с помощью только одного циркуля?

---

[1] Полное название: «Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений».

[2] См.: К о с т о в с к и й А. Н. Геометрические построения одним циркулем. М., 1959, с. 5 и сл.

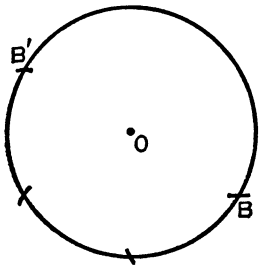


Рис. 91

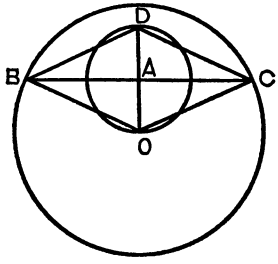


Рис. 92

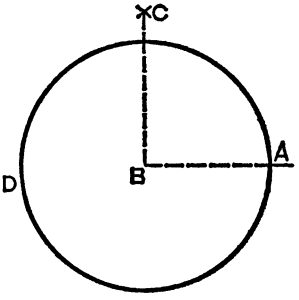


Рис. 93

На этот вопрос дал ответ итальянский математик Лоренцо Маскерони. В изданной им в 1797 г. книге «Геометрия циркуля» Маскерони доказал следующую теорему: *всякая задача на построение, разрешаемая циркулем и линейкой, может быть решена и одним только циркулем.* Следует учесть, что эта теорема предполагает прямую линию построенной, если построены ее любые две точки[1]. В 1928 г. была найдена в одном из книжных магазинов Копенгагена книга датчанина Г. Мора, изданная в 1672 г. в Амстердаме под названием «Датский Евклид». В ней дано полное решение проблемы, которую через сто с лишним лет вновь решил Маскерони. Вот почему теорема, сформулированная выше, носит название «теоремы Мора — Маскерони».

Вот одно из построений Мора.

З а д а ч а 44. «Построить перпендикуляр к прямой (AB) в ее точке B» (рис. 93).

Р е ш е н и е. Из точки B радиусом $|BA| = r$ опишем окружность и найдем точку D, диаметрально противоположную точке A. Из этих двух противоположных точек проводим любые две пересекающиеся дуги. Точка их пересечения C и точка B определяют искомый перпендикуляр.

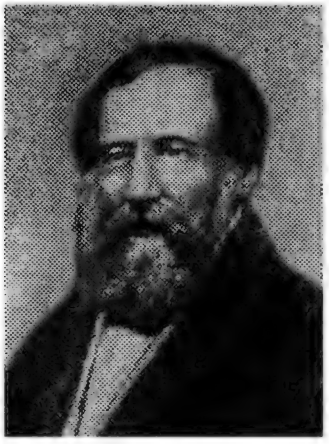
В некоторых практических вопросах линейка более удобна, чем циркуль[2]. Применение построений, выполняемых одной только линейкой, имеет большое значение, например, в работе на обширных земельных участках, где употребление циркуля с большим раствором практически не осуществимо, в то время как с помощью вех легко осуществляется проведение прямых линий.

Отдельные задачи на построение с помощью одной только линейки решались в XVI—XVIII вв. в связи с нуждами живописи и учением о перспективе.

---

[1] Предполагается также, что фигура состоит из конечного числа точек, прямых, окружностей и их дуг.

[2] См.: С м о г о р ж е в с к и й А. С. Линейка в геометрических построениях. М., ГИТТЛ, 1957.



Якоб Штейнер

Однако общая проблема о том, какие построения можно выполнять одной только линейкой, была поставлена и решена лишь в первой половине XIX в. В 1833 г. вышла в свет (переведена на русский язык) работа знаменитого швейцарского геометра Якоба Штейнера «Геометрические построения, производимые с помощью прямой линии и неподвижного круга», в которой было доказано, что *любая задача на построение, разрешаемая циркулем и линейкой, может быть решена одной линейкой, если дана в плоскости чертежа некоторая постоянная окружность (и ее центр)*.

Советский математик Д. Мордухай-Болтовской показал, что вместо окружности достаточно иметь какую-то произвольно малую ее дугу. Вопросы геометрических построений были изучены и развиты в трудах других советских ученых, среди которых отметим С. О. Шатуновского, Н. Ф. Четверухина и др.

§ 22. О РАЗВИТИИ ГЕОМЕТРИИ. ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

Разнообразные пространственные формы, образы и фигуры окружают человека всюду. Геометрические точки, прямые, кривые и ломаные линии, плоскости, поверхности, многоугольники, круги и их части, многогранники и тела вращения — это абстрактные понятия, которые формируются в нашем сознании вследствие длительного общения с конкретными предметами и наблюдениями над реальными объектами, встречающимися в домашней обстановке, в природе и на производстве. Люди на протяжении тысячелетий изучали свойства геометрических форм в первую очередь для того, чтобы использовать их свойства для своих практических потребностей.

Известно, что геометрия, как и другие науки, возникла из практики. При этом уже на первых стадиях своего развития она стояла близко к искусству (живописи, архитектуре), отображающему действительность в художественных образах. Это видно, например, из употребления некоторых простых геометрических форм при плетении корзин из камыша, при изготовлении одежды, палаток и ковров первобытными народами. О связи геометрии с искусством свидетельствуют дошедшие до нас украшения на стенах и предметах домашнего обихода, возраст которых исчисляется в тыся-

челетиях. Сохранившаяся старинная посуда Древнего Египта, Кипра, Индии и других стран древности дает представление о развитии геометрических украшений от простейших фигур, состоящих из системы параллельных отрезков, до сложных комбинаций прямых и кривых линий (рис. 94, 95).

Рис. 94. Геометрические украшения на египетских сосудах VI в. до н. э.

Таким образом, практика в широком смысле слова, т. е. не только потребность в предметах быта и орудиях труда, но и искусство, живопись, архитектура, подготовила путь к геометрии как науки. Наукой геометрия стала в Древней Греции в VII—IV вв. до н. э., после того как в ней стали систематически применяться логические доказательства и были приведены в систему геометрические предложения, последовательно выводимые одно из другого путем умозаключений, в основе которых лежало несколько аксиом. Среди принимаемых без доказательств аксиом и постулатов, изложенных в «Началах», имеются следующие.

1. *Через всякие две точки всегда можно провести одну и только одну прямую линию.*

2. *Из данной точки данным радиусом можно описать окружность.*

3. *Целое больше части*

и др.

Рис. 95. Кувшин III в. до н. э., найденный на острове Кипре

В качестве аксиом и постулатов Евклид выбрал такие предложения, которые, как он считал, можно непосредственно проверить простейшими инструментами или иным путем и выражающие очевидные, по мнению ученых, свойства фигур, проверенные многовековой человеческой практикой. Длительный тысячелетний человеческий опыт показал ученым, в том числе и Евклиду, какие именно истины (предложения) следует считать исходными и положить в основу логического построения науки геометрии. От того, какие предложения приняты за аксиомы, зависит все содержание геометрии. Среди постулатов в «Началах» Евклида пятый по порядку по своему содержанию совпадает с изучаемой в VII классе аксиомой параллельности прямых: *на плоскости через точку, взятую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.* Евклидова аксиома параллельности с древ-

них времен обратила на себя внимание и вызывала сомнение у ученых по следующим причинам.

а) Долгое время, до XIX в., господствовало мнение, согласно которому аксиомы верны потому, что они очевидны сами по себе и не нуждаются в доказательстве. Против очевидности аксиом «Начал», вроде таких, как «от всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию», «равные одному и тому же, равны между собой», «целое больше части» и др., никто не возражал. Пятый же постулат с самого начала его появления показался далеко не очевидным, так как он был значительно сложнее не только остальных аксиом, но и многих теорем. Ясно можно себе представить лишь ограниченную, небольшую часть прямой, плоскости или пространства. С такой именно ограниченной, конечной частью пространства мы и имеем всегда дело на практике. Пятый постулат Евклида, как и само понятие параллельных прямых, содержит известную трудность, заключающуюся в том, что в них речь идет о всей прямой, о всей плоскости. Чтобы убедиться, что данные прямые не пересекаются нигде, надо продолжить их «до бесконечности». Непосредственно опытным путем этого выполнить нельзя, а следовательно, и аксиому проверить нельзя.

б) Первые 28 теорем «Начал», как и теоремы о смежных и вертикальных углах и о равенстве треугольников, доказываются без помощи аксиомы параллельности. И среди других теорем геометрии имеются такие, для доказательства которых нет нужды в этой аксиоме. Таковы, например, почти все теоремы о форме и положении окружности, о взаимном расположении прямой и окружности или двух окружностей и др. Однако имеется ряд теорем, которые опираются на пятый постулат. Таковы теоремы о сумме углов треугольника, о вписанных углах и др. Таким образом, евклидова геометрия как бы разбивается на две части. Одна часть состоит из совокупности теорем, независимых от пятого постулата, она названа «абсолютной геометрией»[1]. Другая часть содержит теоремы, доказательство которых опирается либо непосредственно на пятый постулат, либо на теоремы, доказанные на основании этого постулата (так называемая «собственно евклидова геометрия»).

Естественно возникал вопрос: нельзя ли освободиться от пятого постулата как аксиомы и доказать его, превратить его в одну из теорем? Попытки доказательства этого постулата начались еще в древности и безрезультатно продолжались на протяжении двух с лишним тысячелетий. Следует уяснить себе точный смысл слов «доказать пятый постулат». Это значит: не вводя никаких новых аксиом, путем рассуждений вывести его как логическое следствие из других имеющихся в евклидовой геометрии аксиом.

Математики древности Гемин и Посидоний, жившие до нашей эры, знаменитый астроном Птолемей (II в.), математики Прокл

[1] Это название ввел венгерский математик Янош Бояй в 30-х годах XIX в.

(V в.), Насир ад-Дин ат-Туси (XIII в.), Дж. Валлис (XVII в.), Дж. Саккери (Италия), И. Ламберт (Швеция), Лагранж и Лежандр (XVIII—XIX вв.) и многие другие ученые всех времен и разных народов пытались доказать пятый постулат. Много сил и времени затрачено на эти попытки, но все они окончились неудачей. Иногда кое-кому казалось, что он достиг цели, однако более глубокий анализ всегда обнаруживал какую-то скрытую ошибку.

В XIX в. исключительно большим успехом пользовался учебник Лежандра «Элементы геометрии», который только при жизни автора выдержал более 20 изданий. В этих разных изданиях Лежандр давал все новые и новые «доказательства» пятого постулата, но ни одно из них самого его не удовлетворило. Все попытки таких доказательств оканчивались неудачей.

О знаменитом французском математике Лагранже рассказывают, что он представил Парижской академии решение вопроса, но во время устного доклада внезапно прервал изложение и сошел с кафедры, заявив: «Мне надо еще об этом подумать...»

Несмотря на провал всех попыток доказательства пятого постулата, никто до начала XIX столетия не сомневался в справедливости евклидовой аксиомы параллельных и всей геометрии, на ней основанной. Огромный авторитет Евклида и господствовавшие на протяжении тысячелетий старые идеи, основанные на привычных наглядных представлениях об окружающем нас пространстве, на практике, постоянно направляли умы в одну сторону: снова и снова искать доказательства пятого постулата. Однако эта проблема оставалась нерешенной. Для того чтобы выйти из тупика и найти правильный путь решения вопроса, нужно было не бояться авторитетов, обладать революционным духом, выдающейся научной смелостью; нужен был гений математического мышления, способный порвать с многовековыми предубеждениями, по-новому понять и решить проблему.

Таким гением и революционером в науке оказался наш великий соотечественник Николай Иванович Лобачевский.

* *
*

Николай Иванович Лобачевский родился 1 декабря (20 ноября) 1792 г. в Нижнем Новгороде (ныне г. Горький) в семье мелкого чиновника. После смерти отца[1] осиротевший Николай был определен благодаря стараниям матери в Казанскую гимназию. По окончании гимназии, в 1807 г., Николай Иванович, 16-летним юношей, был зачислен студентом незадолго перед тем открытого Казанского университета. С этого момента вся жизнь Лобачевского была тесно связана с Казанью и ее университетом (рис. 96).

Этот университет в то время еще не стоял на должной академи-

[1] Дата смерти Ивана Лобачевского точно не установлена. См. ИМИ, 1956, вып. IX, с. 62.

Рис. 96. Казанский университет в 30-х годах XIX в.

ческой высоте, но физико-математические науки преподавались в нем хорошо благодаря руководству попечителя С. Я. Румовского и математика-педагога М. Ф. Бартельса (учителя Гаусса), астронома И. А. Литтрова и др.

Молодой студент Лобачевский работал с огромным энтузиазмом и уже за первые два-три года овладел обширным материалом из области точных наук. Он был одним из способнейших студентов университета и принадлежал к прогрессивной молодежи того времени. А это было время патриотического подъема, вызванного Отечественной войной, и пробуждения русского общества. Во вторую половину царствования Александра I ввиду усиления реакции был установлен строгий надзор за поведением студентов. Против Н. И. Лобачевского, проявлявшего «признаки безбожия», было возбуждено дело об исключении его из университета. Лишь энергичное вмешательство профессоров, высоко ценивших выдающиеся способности Николая Ивановича, спасло его от грозящего несчастья.

Н. И. Лобачевский быстро выдвинулся на научно-педагогическом поприще благодаря не только выдающимся способностям, но и настойчивому труду. Он глубоко изучал старые и новые классические произведения выдающихся математиков.

С 1816 г., уже в качестве профессора, Н. И. Лобачевский читал в университете специальные курсы элементарной математики, дифференциального и интегрального исчисления, а позже ему было поручено и преподавание физики, механики и астрономии. На протяжении свыше 40 лет Н. И. Лобачевский принимал самое активное участие в общественной жизни, организации и строительстве Казанского университета. Дважды до 1825 г. он избирался деканом физико-математического факультета, а с 1827 г. в течение 19 лет состоял ректором Казанского университета. По инициативе Лобачевского был создан научный журнал, «Ученые записки Казанского университета», существующий и поныне. Один из исто-

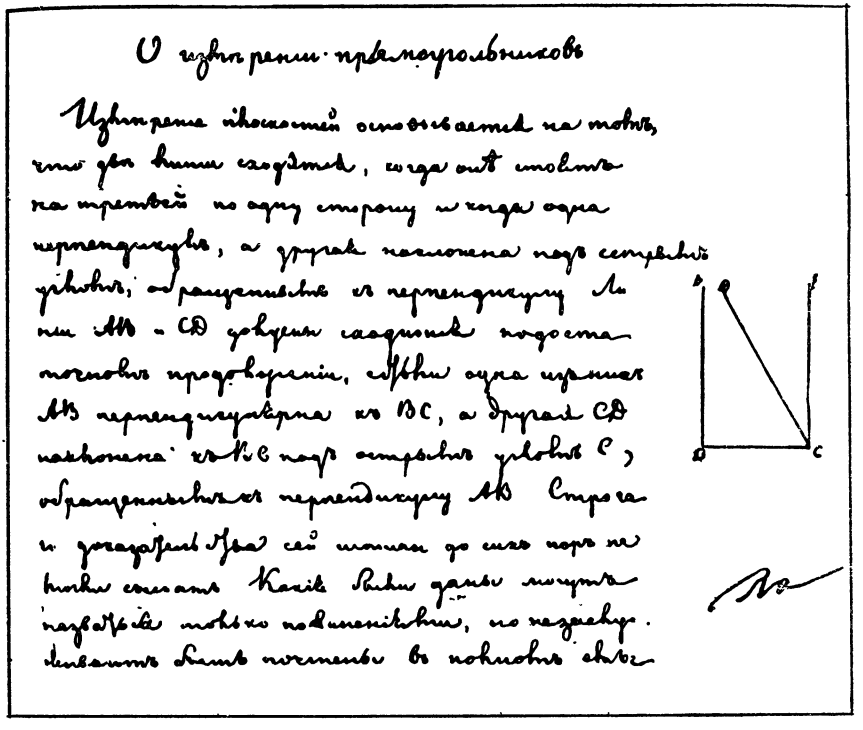


Рис. 97. Факсимиле из рукописи «Геометрия» Н. И. Лобачевского

риков Казанского университета — Загоскин писал, что в стенах Казанского университета «все дышит памятью Н. И. Лобачевского, все восстанавливает перед нами симпатичный облик великого ученого и неутомимого труженика-ректора». Н. И. Лобачевский отдавал много сил и времени задачам воспитания юношества и внес ценный вклад в дело развития русской педагогической мысли.

Параллельно с просветительской, общественной, педагогической и административной деятельностью развивалось и научное творчество Н. И. Лобачевского (рис. 97).

Много нового внес он в разные области математики, физики и астрономии. Однако мировая слава Н. И. Лобачевского зиждется на его работах в области геометрии[1], на создании новой геометрической системы.

Подобно другим математикам, Николай Иванович вначале тоже пытался доказать пятый постулат. Применяя метод доказа-

[1] О научной и педагогической деятельности Н. И. Лобачевского и его мировоззрении см. статьи, опубликованные в ИМИ, вып. II, III, IV, IX, а также: Лаптев Б. Л., Н. И. Лобачевский. М., 1976.

тельства от противного, он отвергает пятый постулат и вместо него присоединяет к остальным аксиомам евклидовой геометрии новую аксиому о параллельности прямых, прямо противоположную евклидовой аксиоме, называемую ныне «аксиомой Лобачевского»: *в плоскости через точку вне прямой можно провести по крайней мере две прямые, не пересекающие данной прямой.*

Если бы пятый постулат был следствием других евклидовых аксиом, то аксиома Лобачевского должна была бы привести к противоречию. Между тем выводя все новые и новые следствия из сделанного им допущения, Лобачевский констатировал, что ни к какому логическому противоречию оно не приводит, а наоборот, полученные выводы и следствия образуют новую логически стройную геометрию. Это убедило его в том, что пятый постулат не зависит от других аксиом евклидовой геометрии, из них не вытекает и поэтому его доказать нельзя.

Так была решена проблема пятого постулата.

Новая, построенная Н. И. Лобачевским геометрия была названа «воображаемой». Гаусс ее назвал «неевклидовой», мы же в настоящее время называем ее «геометрией Лобачевского».

Вот некоторые ее положения (теоремы), вытекающие из а к с и о м геометрии Лобачевского.

1. *В отличие от геометрии Евклида, в которой сумма углов треугольника равна* $2d$, *и в отличие от сферической геометрии, в которой сумма больше* $2d$, *в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше* $2d$ *и убывает по мере возрастания площади треугольника.*

2. *Подобных фигур не существует. Если два треугольника имеют соответственно равные углы, то и стороны их соответственно равны.*

Эти факты Лобачевский изложил в своих произведениях «О началах геометрии» (1829), «Новые начала геометрии», «Пангеометрия»[1].

Идеи Лобачевского были настолько оригинальны и неожиданны и до того опередили свой век, что их не поняли даже крупные математики того времени[2].

---

[1] С идеями неевклидовой геометрии можно ознакомить учащихся в X — XI классах. См.: Г. И. Гл е й з е р. Понятие о геометрии Лобачевского в средней школе. — Ученые записки Тираспольского пединститута, 1956, № 1, а также: Ф е т и с о в А. И. Очерки по евклидовой и неевклидовой геометрии. М., 1965.

[2] Лишь два современника Лобачевского полностью разделяли его взгляды. Первый из них, молодой венгерский математик Янош Бояй, независимо от Лобачевского сам пришел к созданию той же неевклидовой геометрии. Лобачевский впервые доложил о своих результатах на заседании физико-математического факультета 23 февраля 1826 г., а в 1832 г. появилась книга Бояй «Аппендикс», в которой изложены принципы той же новой геометрии.

Вторым ученым, разделявшим идеи Лобачевского, был великий немецкий математик К. Ф. Гаусс, который, однако, не выступил открыто в их защиту.

Рис. 98. Надгробный памятник на могиле Н. И. Лобачевского

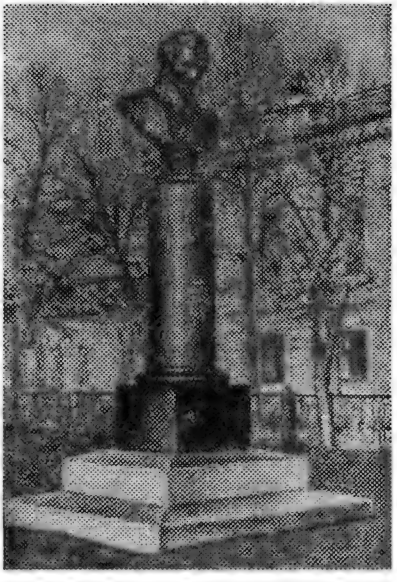


Рис. 99. Памятник Н. И. Лобачевскому в Казани

Геометрия Лобачевского не была признана современниками, она была встречена с полным равнодушием или даже с иронией. Презрительное отношение к новой геометрии не изменилось на протяжении всей жизни ее творца. Но даже оставшись в одиночестве, Н. И. Лобачевский не отказался от своих идей. Он не только был убежден в логической непротиворечивости новой геометрии, но твердо верил и в ее применимость к реальному физическому пространству. Он утверждал, что только опытным путем можно проверить, соответствует ли та или иная геометрическая система законам физики и астрономии. С этой целью он производил астрономические наблюдения и измерения, чтобы установить, чему же равна сумма внутренних углов треугольника. Однако такие измерения не могли и не могут дать определенного результата в силу недостаточ-

Рис. 100. Медаль памяти Н. И. Лобачевского, выбитая в 1895 г.

ной точности инструментов и приближенного характера любых измерений. Николай Иванович упорно искал оправдание своей теории в механике и астрономии. Хотя развитие науки и техники в то время не позволяло подтвердить высказанные положения, Н. И. Лобачевский не переставал верить, что торжество его идей рано или поздно наступит, и даже незадолго до смерти, уже слепой, он диктует свою «Пангеометрию».

Лобачевский умер в 1856 г. непризнанным, казалось, забытым. Но уже в 70-х годах прошлого столетия имя Лобачевского было на устах математиков всего мира, а его работы были переведены и распространены во всех культурных странах (рис. 98—100).

После того как идеи Лобачевского получили признание, его геометрия стала бурно развиваться, особенно в трудах Римана, Кэли, Клейна, Гильберта. Несмотря на то что геометрия Лобачевского и открытая за нею неевклидова геометрия Римана прочно вошли в современную науку, геометрия Евклида сохраняет свое полное значение в вопросах практики, строительства и техники. Неевклидовы геометрии находят себе применение в некоторых более сложных теоретических и практических вопросах современной математики, физики и техники.

Открытие гениального русского ученого Николая Ивановича Лобачевского дало решающий толчок грандиозному развитию науки, способствовало и способствует поныне более глубокому пониманию окружающего нас материального мира.

Глава 7

ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Задачи по алгебре и геометрии № 1—44 см. в тексте.

§ 23. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ

а) Из «Московского папируса».

45. $x-\frac{1}{5}x=20$. **46.** $\left(1+\frac{1}{2}\right)x+4=10$. **47.** $2x+x=9$.

б) Из «папируса Ахмеса».

48. $x+\frac{1}{5}x=21$. **49.** $\left(x+\frac{2}{3}x\right)-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}x\right)=10$.

50. $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=10$. **51.** $x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=37$.

52. $3x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}x=1$.

в) Из «Арифметики» Диофанта.

53. $\frac{x+100}{x+20}=3$. **54.** $\frac{100-x}{20-x}=6$.

55. $(b+x)a=\frac{(a+b)x+(a+x)b}{2}$.

56. $x+y=a,\ x-3y=b$.

57. $x+y=a,\quad \frac{x}{b}\pm\frac{y}{c}=d$.

58. $\frac{x+30}{y-30}=2,\ \frac{y+50}{x-50}=3$.

г) Из алгебры арабского математика и астронома ал-Караджи (X—XI вв.).

59. $x+y=10,\quad \frac{x}{y}=1\frac{1}{5}$.

60. $x+y=2y,\quad y+1=3x$.

Из курса математики французского автора Ж. Озанама (XVII в.).

61. «Трое хотят купить дом за 24 000 ливров. Они условились, что первый даст половину, второй — одну треть, а третий — оставшуюся часть. Сколько даст каждый?»

Из «Всеобщей арифметики» Ньютона.

62. «Некто желает распределить между бедными деньги. Если бы у него было на восемь динариев больше, то он мог дать каждому по три, но он раздает лишь по два и у него остается три. Сколько было бедных?»

Из «Арифметики» Л. Магницкого.

63. «Один путник идет от града в дом, а ходу его будет 17 дней, а другой путешественник от дому во град тот же путь творяше может пройти в 20 дней, оба же сии человека пойдоша во един и тот же час от мест своих, и ведательно есть, в колико дней сойдутся».

64. «Некто пришел в ряд, купил игрушек для малых ребят: за первую игрушку заплатил $^1/_5$ часть всех своих денег, за другую $^3/_7$ остатка от первой покупки, за третью игрушку заплатил $^3/_5$ остатка от второй покупки; а по приезде в дом нашел остальных в кошельке денег 1 руб. 92 коп., спрашивается, сколько в кошельке денег было и сколько за которую игрушку денег заплачено».

Из трактата «Математика в девяти книгах».

65. «Сообща покупают вещь. Если каждый человек внесет по 8, то избыток (равен) 3. Если (каждый) человек внесет по 7, то недостаток (равен) 4. Спрашивается количество людей и стоимость вещи».

66. «Имеется 5 воробьев и 6 ласточек, их взвесили на весах. Вес всех воробьев тяжелее веса всех ласточек. Если переместить 1 ласточку и 1 воробья, то вес будет как раз одинаковым. Общий вес ласточек и воробьев 1 цзинь. Спрашивается, сколько весят ласточка и воробей».

Из «греческой антологии».

67. «Ослица и мул шли вместе, нагруженные мешками равного веса. Ослица жаловалась на тяжесть ноши. «Чего ты жалуешься, — сказал мул, — если ты мне дашь один твой мешок, моя ноша станет вдвое больше твоей, а если я дам тебе один свой мешок, наши грузы только сравняются». Сколько было у каждого?»

Из «Бахшалийской рукописи».

68. «Найти число, которое от прибавления 5 или отнятия 11 обращается в полный квадрат».

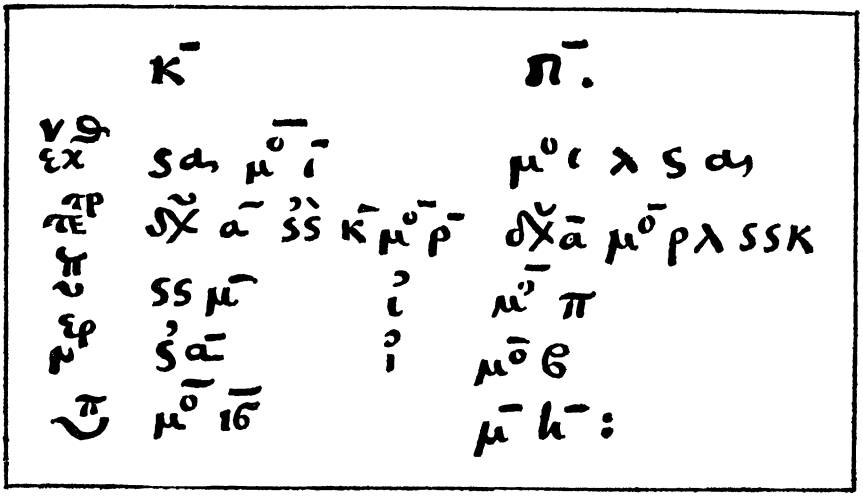


Рис. 101. Диофантово решение системы уравнений
$x+y=20$,
$x^2-y^2=80$

а) Из «Книги абака» Фибоначчи.

69. $\frac{36}{10-x}-3=\frac{36}{x}$. **70.** $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+2}=1\frac{1}{2}$.

б) Из книги Регномонтана (XV в.).

71. $10x=x^2+\frac{100}{27}$. **72.** $y+\frac{1}{y}=25$.

73. $10x-60+\frac{10x-60}{x}=80$.

в) Из «Науки о числах в трех частях» Николая Шюке (XV в.).

74. $3x^2+12=30x$.
75. $144+x^2=36x$.

г) Системы уравнений из «Арифметики» Диофанта.

76. $\begin{cases} x+y=20, \\ x^2+y^2=208. \end{cases}$
77. $\begin{cases} x+y=20, \\ x^2-y^2=80 \text{ (рис. 101).} \end{cases}$
78. $\begin{cases} x=3y, \\ x^2+y^2=5(x+y). \end{cases}$
79. $\begin{cases} x=3y, \\ x^2+y^2=10(x-y). \end{cases}$

80. $\begin{cases} x = 3y, \\ (x^2 - y^2) = 12(x - y). \end{cases}$

81. $\begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 6x. \end{cases}$

82. $\begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 6(x - y). \end{cases}$

83. $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = (x - y) + 20. \end{cases}$

д) Из «Алгебры» ал-Хорезми.

84. $\begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 21. \end{cases}$

85. $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 + y^2 = 40. \end{cases}$

86. $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 - y^2 = (x - y) + 54. \end{cases}$

87. $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 = 4xy. \end{cases}$

88. $\begin{cases} x + y = 10, \\ (x + y)^2 = 2\frac{7}{9}x^2. \end{cases}$

89. $\begin{cases} x + y = 10, \\ \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2\frac{1}{6}. \end{cases}$

90. $\begin{cases} x + y = 10, \\ y^2 = 81x. \end{cases}$

91. $\begin{cases} x + y = 10, \\ xy : |y - x| = 5\frac{1}{4}. \end{cases}$

е) Из «Алгебры» ал-Караджи (XI в.).

92. $\begin{cases} x = \frac{3}{4}y, \\ xy + x + y = 62. \end{cases}$

93. $\begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 4x + 5. \end{cases}$

ж) Из «Книги абака» Л. Фибоначчи.

94. $\begin{cases} xy - y = 42, \\ x - y = 2. \end{cases}$

95. $\begin{cases} xy + y = 40, \\ x - y = 2. \end{cases}$

96. $\begin{cases} x + y = 10, \\ (\frac{x}{y} + 10)\ (\frac{y}{x} + 10) = 122\frac{2}{3}. \end{cases}$

97. $\begin{cases} x + y = 10, \\ \frac{x}{y}(x - y) = 24. \end{cases}$

з) Из книги «Косс» К. Рудольфа.

98. $\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=539\,200,\\(x-y)(x^2-y^2)=78\,400.\end{cases}$

99. $\begin{cases}xy+x+y=573,\\x^2+y^2-x-y=1716.\end{cases}$

Из «Арифметики» Диофанта.

100. «Найти три числа так, чтобы суммы всех трех и каждых двух были квадратами».

101. «Найти два числа, произведение которых, сложенное с каждым из данных чисел, составит куб некоторого числа».

Из «Книги абака» Л. Фибоначчи.

102. «Найти число, 19/20 которого равно квадрату самого числа».

Из «Арифметики» Магницкого.

103. «Найти число, зная, что, сложив его квадрат с 108, получается число, в 24 раза больше искомого».

Из «Всеобщей арифметики» Ньютона.

104. «Даны стороны AB, AC и основание BC треугольника ABC и из вершины угла A на основание опущена высота AD. Найти отрезки основания BD и DC».

105. «Даны периметр и площадь прямоугольного треугольника ABC. Найти гипотенузу BC».

Задача Алькуина.

106. «Разделить сто мер пшеницы между 100 лицами так, чтобы каждый мужчина получил 3, каждая женщина 2, а каждое дитя $^1/_2$ меры. Сколько мужчин, женщин и детей?»

§ 24. ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

Из 1-й книги «Начал» Евклида.

107. «Данный прямолинейный угол рассечь пополам».

108. «Данную ограниченную прямую (т. е. отрезок) рассечь пополам».

Из 3-й книги «Начал» Евклида.

109. «Найти центр данного круга».

110. «Рассечь данную дугу пополам».

Из 4-й книги «Начал» Евклида.

111. «В данный круг вписать хорду данной длины».

Из 6-й книги «Начал» Евклида.

112. «Для данных двух отрезков найти средний пропорциональный».

113. «Для трех данных отрезков найти четвертый средний пропорциональный».

Задача Брахмагупты.

114. «Зная высоту свечи и высоту вертикального шеста, а также расстояние между ними, найти длину тени шеста».

Из задач Архимеда.

115. «Площадь круга, описанного около квадрата, вдвое больше площади вписанного в квадрат круга. Доказать!»

116. «Если в круге хорды AB и CD пересекаются под прямым углом, то сумма квадратов отрезков AE, BE, CE и DE равна квадрату диаметра. Доказать!»

Задача ал-Караджи.

117. «Найти площадь прямоугольника, основание которого вдвое больше высоты, а площадь численно равна периметру».

118. «Найти диаметр круга, площадь которого равна 100»

Из «Книги абака» Л. Пизанского (Фибоначчи).

119. «Две башни, одна высотой 40 футов, а другая — 30 футов, расположены на расстоянии 50 футов одна от другой. К расположенному между ними колодцу слетают одновременно с обеих башен две птички и, летя с одинаковой скоростью, одновременно прибывают к колодцу. Найти расстояние колодца от башен».

Задача Леонардо да Винчи.

120. «Если два равных круга пересекаются друг с другом, то прямая, проходящая через точки их пересечений, будет в любой части своей длины находиться на одинаковых расстояниях от того и другого центра. Доказать!»

Доказать теорему Эйлера.

121. «Во всяком четырехугольнике сумма квадратов сторон равна сумме квадратов его диагоналей, сложенной с учетверенным квадратом отрезка, соединяющего середины диагоналей».

Задача Я. Штейнера.

122. «Если соединить точку E пересечения диагоналей трапеции с точкой F пересечения ее непараллельных сторон, то большее ее основание разделится пополам линией EF. Доказать!»

Ответы, указания и решения к задачам

1. $(2x + 1)(3x - 2) = 6x^2 - x - 2$.

5. $x = \frac{d-b}{a-c}$. Указание. Пусть первый имеет a вещей и b монет, второй же — c вещей и d монет. Из условия задачи следует: $ax + b = cx + d$.

6. Указание. $a > b \to c > d$, $a > c \to b < d$; итак d — наименьшее из четырех чисел. Далее, $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c} > 1$, $a - b > c - d$.

11. 12; 8.

19. Откладываем на прямых OP и OQ отрезки $OM' = m$, $ON' = n$ и проводим через точку H прямую HL, параллельную $M'N'$.

30. $$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{10}(\sqrt{6}+\sqrt{7}-\sqrt{8})}{(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2-8} =$$
$$= \frac{\sqrt{10}(\sqrt{6}+\sqrt{7}-\sqrt{8})}{\sqrt{168}+5} =$$
$$= \frac{\sqrt{10}(\sqrt{6}+\sqrt{7}-\sqrt{8})(\sqrt{168}-5)}{143}.$$

32. Абсолютная ошибка $6{,}25\,\pi$, относительная $11\frac{1}{9}\%$.

54. $x = 4$.

55. $x = \frac{ab}{2b-a}$.

56. $x = \frac{3a+b}{4}$; $y = \frac{a-b}{4}$.

57. $x = \frac{b(a-cd)}{b-c}$; $y = \frac{c(bd-a)}{b-c}$.

58. $x = 98$; $y = 94$.

59. $x = \frac{60}{11}$; $y = \frac{50}{11}$.

60. $x = y = \frac{1}{2}$.

61. 12 000; 8000; 4000.

62. 11.

63. $9\frac{7}{37}$.

65. 7 человек; стоимость вещи 53.

66. Вес воробья $1\frac{13}{19}$ лана, вес ласточки $1\frac{5}{19}$ лана.

67. У мула 7, у ослицы 5 мешков.

68. Решение. $x + 5 = a^2$, $x - 11 = b^2$; $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 16$. Имеются две возможности: 1) $a + b = 8$, $a -$

$-b=2$, $a=5$, $b=3$, $x=20$; 2) $a+b=16$, $a-b=1$, $a=\frac{17}{2}$, $b=\frac{15}{2}$, $x=67\frac{1}{4}$.

69. $x=6$.

70. $x=8$.

71. $x=5-\sqrt{21\frac{8}{27}}$. **72.** $y=\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{621}{4}}$.

73. $x=+\frac{13}{2}+\sqrt{\frac{193}{4}}$. **76.** $x=12$, $y=8$. **77.** $x=12$, $y=8$

78. $x=6$, $y=2$. Диофант так поступает: $y=p$, $x=3p$ $9p^2+p^2=5(3p+p)$; $10p^2=20p$, $p=2$, $x=6$, $y=2$.

79. $x=6$, $y=2$. **81.** $x=54$, $y=18$. **82.** $x=36$, $y=12$

83. $x=6\frac{1}{2}$, $y=4\frac{1}{2}$. **84.** $x=7$, $y=3$. **85.** $x=7$, $y=3$

86. $x=7$, $y=3$. **87.** $x=8$, $y=2$. **88.** $x=6$, $y=4$.

89. $x=6$, $y=4$. **90.** $x=1$, $y=9$. **91.** $x=3$, $y=7$.

92. Положительные решения: $x=6$, $y=8$.

93. $x_1=5$, $x_2=1$; $y_1=5$, $y_2=9$.

94. Указание. $y^2+y-42=0$.

95. Указание. $x^2-3x-40=0$.

96. $x=6$, $y=4$. **97.** $x=8$, $y=2$.

98. Указание. Разделив почленно, получим:

$$\frac{x^2+y^2}{(x-y)^2}=\frac{337}{49}.$$

99. $x=40$, $y=13$.

100. Пусть сумма всех трех чисел, предполагает Диофант, равна $(x+1)^2$, причем сумма первых двух равна x^2, тогда третье равно $2x+1$. Пусть сумма второго и третьего равна $(x-1)^2$. Получим, что первое равно $4x$, второе x^2-4x. Итак, $x=20$. Первое число равно 80, второе 320, третье 41.

101. $\frac{112}{13}$; $\frac{27}{169}$. **102.** $\frac{19}{20}$. **103.** 18, 6.

104. Указание. Пусть $AB=a$, $BC=c$, $AC=b$, $BD=x$, тогда $a^2-x^2=b^2-c^2+2ax-x^2$. Отсюда находим x.

105. Решение Ньютона. Положим половину периметра равной a, площадь равной b^2 и $BC=x$, тогда $AC+AB=2a-x$. Так как $x^2=AB^2+AC^2$ и $4b^2=2AB\times AC$, то $x^2+4b^2=AB^2+AC^2+2AB\times AC=(AB+AC)^2=(2a-x)^2$. Значит, $x^2+4b^2=4a^2-4ax+x^2$, откуда $x=a-\frac{b^2}{a}$.

106. Ответ Алькуина: 11, 15, 74. Указание. Решая систему неопределенных уравнений, получим: мужчин 20; 17; 14; 8; 5; 2; женщин 0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; детей 80; 78; 76; 74; 72; 70; 68.

107. Чтобы разделить угол BAC пополам, Евклид берет на AB произвольную точку D и на AC откладывает $AE=AD$. Далее, на DE он строит равносторонний треугольник DEF. Прямая AF делит угол BAC пополам.

Это отличающееся от изложенного в наших учебниках евклидово построение допускает два решения: треугольник может быть построен по обе стороны DE.

108. Чтобы разделить отрезок AB пополам, Евклид строит на нем равносторонний треугольник ABC, делит угол ACB пополам прямой CD (см. задачу 107). Точка D — середина отрезка AB.

109. Доказательство Евклида (методом от противного) сводится к тому, что центр круга лежит на перпендикуляре, восстановленном из середины хорды.

110. Евклид делит пополам хорду AB, стягивающую данную дугу. Из точки C, середины хорды, он строит перпендикуляр к AB, пересекающий дугу в искомой точке D.

111. Проведя диаметр BC, Евклид откладывает отрезок CE, равный данному отрезку D. Из центра C раствором CE опишем окружность, пересекающую данную окружность в точке A. CA — искомая хорда.

Задача является, конечно, неопределенной.

112. Решение Евклида этой, как и следующей, задачи изложено в современных учебниках.

114. Обозначив через H, h, d соответственно высоту свечи, высоту шеста и расстояние между ними, находим из подобия треугольников: длина тени равна $\frac{hd}{H-h}$.

117. 3.

118. Ответ ал-Караджи $d^2 = \frac{1400}{11}$. Итак, для π взято значение $\frac{22}{7}$, указанное Архимедом.

119. 18 ф., 32 ф.

122. У к а з а н и е. Пусть M, N — точки пересечения прямой FE с AB, бо́льшим основанием, и CD, меньшим основанием, трапеции. Из подобия треугольников MFA и NFD, MFB и NFB и т. д. выводится: $AM = MB$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Белл Э. Т. Творцы математики. Предшественники современной математики / Под ред. С. Н. Киро. М., 1979.

2. Булгаков П. Г. Жизнь и труды Бернулли. Ташкент, 1972.

3. Гуров С. Н. и др. П. Л. Чебышев. Пособие для учащихся. М., 1979.

4. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия в трех томах / Под ред. А. П. Юшкевича. М., 1970, т. I, II; 1972, т. III.

5. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М., 1974.

6. Лаптев Б. Л. Н. И. Лобачевский. М., 1976.

7. Лысенко В. И. Николай Иванович Фусс. 1755—1826. М., 1975.

8. Оре О. Приглашение в теорию чисел / Пер. с англ. М., 1980.

9. Понтрягин Л. С. Метод координат. М., 1977.

10. Постников М. М. Теорема Ферма. М., 1978.

11. Реньи А. Трилогия о математике (диалоги о математике. Письма о вероятности. Дневник — Записки студента по теории информации)/ Пер. с венг. Под ред. и с предисл. Б. В. Гнеденко. М., 1980.

12. Симонов Р. А. Математическая мысль Древней Руси. М., 1977.

13. Сираждинов С. Х., Матвиевская Г. П. Абу Райхан Беруни и его математические труды. М., 1976.

14. Сойер У. У. Прелюдия к математике. М., 1972.

15. Тихонов А. Н., Костомаров Д. П. Рассказы о прикладной математике. М., 1979.

16. Хинчин А. Я. Три жемчужины теории чисел. М., 1979.

17. Хрестоматия по истории математики в 2-х т. / Под ред. А. П. Юшкевича. М., 1975, 1976.

18. Математика в школе. Рубрики «Математический календарь» и «Ученые-математики» (с 1975 г.).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ[1]

Абель, Н. (Abel N. H., 1802—1829)—53
Абу-л-Вафа (940—998)—78, 79, 84, 204, 205, 208, 210
Абу Камил (ок. 850—930)—52, 53
Александров П. С. (р. 1896)—43, 152, 153
Альберти (Alberti L. B., 1402—1472)—40
Алькуин (Alcuin, 735—804)—225, 228
Ампер (Ampére A. M., 1775—1836)—164
Анаксагор (ок. 500—428 до н. э.)—39, *180*, 189
Анаксимандр (610—543 до н. э.)—207
Анания Ширакаци (VII)
Анариций (IX—X)—199
Андронов И. К. (1894—1976)—16
Аньези (Agnesi M. G., 1718—1799)—145
Апиан П. (Petrus Apianus, XVI)—141
Аполлоний Пергский (265?—170? до н. э.)—37, 47, 102, 145, 182, 184—187, 195
Араго (Arago D. F., 1786—1853)—146
Ариабхатта I (V)—12, 22, 58, 82, 98, 109, 173
Аристарх Самосский (IV—III в. до н. э.)—83
Аристотель (384—322 до н. э.) — 32, 100, 103, 127, 171, 181, 183, 190, 207
Аристофан (452—380 до н. э.) —189
Архимед (287—212 до н. э.) 17, 39, 47, 57—59, 66, 88, 91, 97—99, 101, 102, 104, 121, 146, 180—182, 184—188, 193, 207, 226, 229
Архит Тарентский (ок. 428—365 до н. э.) — 32, 33, 36, 105, 181, 195
Ахмес (ок. 2000 до н. э.) —27, 55, 56, 97, 101, 221
Ашкинузе В. Г. (род. 1927) —64, 72

Байрон А. (1815—1852) —146
Бари Н. К. (1901—1961) — 154
Барроу (Barrow I., 1630—1667)—58, 86, 158
Бартельс (Bartels M. F., 1769—1836)—216
ал-Баттани (ок. 850—929) —79, 84
Башмакова И. Г. (р. 1921) —35, 127, 129, 155, 159, 182
Безу (Bézout E., 1730—1783)—45
Бернулли Д. (Bernoulli D., 1700—1782) — 160, 161
Бернулли Я. (Bernoulli Jakob, 1654—1705) — 17, 159
Бернулли И (Bernoulli Johan, 1667—1748) — 64, 159, 160
Бернулли Н. (Bernoulli N., 1687—1759) — 160, 230

[1] Указаны страницы. Курсивом набраны номера страниц, содержащих биографические сведения.

Бернштейн С. Н. (1880—1968) — 170
Бертран (Bertrand J. L. F., 1822—1900) — 169
Бертран (Bertrand L., 1731—1812) — 80, 201
ал-Беруни (ал-Бируни, 973—1048) — 56, 94, 230
Бион (Bion N., XVIII) — 97
Больцано (Bolzano B., 1781—1848) — 132
Бомбелли (Bombelli R., XVI) — 24, 129
Боэций (Boethius A. M., ок. 480—524) —32, 59, 77, 128, 174
Бояй (Bolyai J., 1802—1860)—214, 218
Брауэр (Brouwer L.) — 153
Брахмагупта (р. 598) — 22, 94, 98, 109, 173, 226
Бриггс (Briggs H., 1561—1630) — 72 , 73, 74
Брашман Н. Д. (1796—1866) — 166, 167
Брианшон (Brianchon Ch. J., 1785—1864) — 88
Брокар (Brocard H., 1845—1922) — 88
Буге (Bouguer P., 1698—1758) — 14
Буняковский В. Я. (1804—1889) — 166
Бурбаки (Bourbaki N., XX) — 127, 129
Бутлеров А. М. (1828—1886) — 149
Бухштаб А. А. (р. 1905) — 56, 113
Бхаскара П. (р. 1114) — 22, 23, 52, 78, 89, 94, 98, 107, 109, 173, 174, 200
Бюрги (Bürgi J., 1552—1632) — 65—71

Вавилов С. И. (1891—1951) — 86
Вайман А. А. — 171
Валлис (Wallis J., 1616—1703) — 51, 59, 60, 74, 86, 87, 132, 144, 158, 200, 215
Ван дер Варден Б. Л. — 33, 36, 45, 47, 108, 127, 178, 206
Ван Ромэн (Van Roomen A., 1561—1615) — 99
Ван Фань (229—267) — 98
Васильева А. Б. (р. 1926) — 155
Вега (Vega G., 1754—1802) — 73
Вейерштрасс (Weierstrass K. Th. W., 1815—1897) — 132, 136, 148, 149, 163
Вейль (Weyl G., 1885—1955) — 153
Веронезе П. (Кальяри) (1528—1588)—40
Веселовский И. Н. (р. 1892—1975)—33, 36, 45, 108, 127
Видман (Widman Jan, XV) — 142
Виет (Viete F., 1540—1603) — 11, 12, 17, 24, 32, 42, 79, 94, 145, 158
Вилейтнер (Wileitner H., 1874—1931) — 19, 115
Виноградов И. М. (р. 1891) — 170
да Винчи (da Vinci L., 1452—1519) — 40, 93, 210, 226
Витрувий П. (I в. до н. э.) — 33, 39, 196
Влакк (Vlacg A., 1600—1667) — 73
Вольтер (Voltaire 1694—1778) — 145
Вронская Е. В. (р. 1898) — 155
Выгодский М. Я. (1898 — 1965) — 20, 182

Галилей (Galilei G., 1564—1642)—32, 37, 39, 130, *138*
Галуа (Galoiste E., 1811—1832) — 43
Ганкель (Hanckel H., 1839—1873) — 60
Гарриот (Harriot T., 1560—1621) — 11, 13, 44, 51, 144
Гаусс (Gauss K. F., 1777—1855) — 74, 96, 146, 163, 168, 216, 218
Гвин С. (Gwynne, ум. 1720) — 73
Гей-Люссак (Gay-Lussac, 1778—1850) — 146
Гейне (Heine H., 1797—1856) — 196
Гельфанд И. М. (р. 1913) — 43
Гельфонд А. О. (1906—1968) — 113
Гемин (ок. 150 до н. э.) — 214
Герардо Кремонский (1114—1187)—129
Гернет Н. Н. (1876—1943) — 152
Геродот (V в. до н. э.) — 171, 180, 205, 206
Герон Александрийский (I в.) — 18, 27, 33, 35, 90, 91, 94, 96, 98, 101, 102, 174, 175, 177, 187, 195, 206
Гильберт (Hilbert D., 1862—1943) — 80, 153, 220
Гипатия (370—415) — *144*, *145*
Гиппарх (II в. до н. э.) — 77, 81, 187
Гиппас Метапонтский (VI—V в. до н. э.) — 126, 127
Гиппий Элидский (V в. до н. э.) — 191, 193
Гиппократ Хиосский (V в. до н. э.) — 36, 95, 105, 180, 190, 195
Гиршвальд Л. Я. (р. 1894) — 70
Глейзер Г. И. (1904—1967) — 5, 56, 184, 218
Гнеденко Б. В. (р. 1912) — 144, 175, 230

Головин М. Е. (1756—1790) — 163
Гольдбах (Goldbach Ch., 1690—1764) — 163
Грацианская Л. М. — 149
Грегори (Gregory J., 1638—1675) — 59, 86
Греффе (Graeffe К. Н., 1799—1873) — 17
Гунтер (Gunter E., 1581—1626) — 75, 79, 85
Гюйгенс (Huygens Ch., 1629—1695) — 64, 158

Давидов Ю. А. (1823—1885) — 200
Даламбер (d' Alambert J., 1717—1783) — 159
Данделен (Dandelin G., 1794 — 1887) — 17
Дедекинд (Dedekind R., 1831 — 1916) — *132*—137
Дезарг (Desargues G., 1593—1661) — 40, 106
Декарт (Descartes R., 1596—1650) — 17, 20, 24, 42—45, 51, 61, 62, 86, 115, 121, 125, 130, 131, 144, 145, *156—158*
Деламбр (Delambre J.-B. J., 1749—1822) — 208
Делоне Б. Н. (р. 1890) — 43, 113, 170
Демокрит (ок. 460—370 до н. э.) — 39, 100, 101, 105, 171, 177, 180
Депман И. Я. (1885—1970) — 73, 208
Диностpат (IV в. до н. э.) — 191
Диоген (III) — 196
Диофант (III) — 11, 12, 21, 22, 35, 42, 46, *108*, *109*, 112—115, 145, 168, 187, 221, 223, 225, 228
Дирихле Лежен (Dirichlet P. G. Lejeune, 1805—1859) — 115
Дюбуа Раймон (Du Bois-Reymond P., 1841—1889) — 150
Дюрер (Dürer A., 1471—1528) — 40, 208

Евдокс Книдский (ок. 408—355 до н. э.) — 13, 33, 36, 93, 100, 101, 102, 105, 123—128, 136, 137, 177, 179, *181*, 182, 184, 195
Евклид (365?—300? до н. э.) — 13, 14, 26—33, 35—37, 47, 48, 52, 58, 80, 88, 93—96, 100—105, 115—118, 121—130, 145, 162, 168, 175, 177—*182*, 183, 184, 197, 198, 201, 203, 209, 213, 214, 215, 218, 220, 225, 228, 229

Жермен (Germain S., 1776—1831) — 146
Жирар (Girard A., 1595—1632) — 20, 24
Жуковский Е. Н. (1847—1921) —151

Запольская Л. Н. (р. 1897) — 152, 155
Зернов Н. Е. — 167
Золотарев Е. И. (1847—1878) — 169

Кавальери (Cavalieri B. 1591? — 1647) — 130, 131, 158
Каган В. Ф. (1869—1953) — 26
Кантор (Cantor G., 1845—1918) — 136
Капелла М. (Capella M. E., V) — 128
ал-Караджи (X — XI) — 221, 224, 226, 229
Кардано (Cardano G. 1501—1576) — 17, 24, 119, 139, 140
Карно (Carnot L., 1753—1823) — 94
Кассиодор (Cassiodorius M. A., р. ок. 475) — 128
ал-Каши (XIV—XV) — 17, 59, 78, 98, 129, 130, 141
Келдыш Л. В. (р. 1904) — 154
Кеплер (Kepler J., 1571—1630) — 32, 67, 68, 73, 74, 79, 186
Кириллова Ф. М. (р. 1931) — 155
Клайн М. — 76
Клейн (Klein F., 1849—1925) — 40, 220
Клеро (Clairaut A. C., 1713—1765) — 52, 145
Ковалевская С. В. (1850—1891) — *147—152*
Ковалевский В. О. (1842—1883) — 148—*149*, 163
Колмогоров А. Н. (р. 1903) — 230
Колосов А. А. — 187
Кондорсе (de Kondorcet M., 1743—1794) — 161
Коперник Н. (1473—1543) — 32, 39, 78, 79, *138*
Кордемский Б. А. — 202
Костовский А. Н. — 210
Котек В. В. — 159
Котельников С. К. (1723—1806) — 163
Кочина (Полубаринова-Кочина) П. Я. (р. 1899) — 154
Коши (Cauchy A. L., 1789—1857) — 14, 15, 74, 94, 132, 163, 164
Красильщикова Е. Я. (р. 1919) — 155
Крафт (Krafft S. W., 1701—1754) — 177
Крылов А. Н. (1863—1945) — *16*, 151, 170
Кулик (Kulik J. F., 1793—1863) — 73

Куммер (Kummer E. E., 1810—1893) — 115
Курант Р. — 153
Курош К. Г. (1908—1978) — 43
Кэли (Cayley A., 1821—1895) — 220

Лагранж (Lagrange J. L., 1736—1813) — 9, 45, 53, 94, 113, 146, 151, 159, 168, 215
Ладыженская О. А. (р. 1922) — 154
Лакруа (Lacroix S. F., 1765—1843) — 35
Лаланд (de Lalande M., XVIII) — 145
Ландау (Landau E., 1877—1938) — 153
Ламберт (Lambert J. H., 1728—1777) — 132, 190, 215
Ламе (Lame G., 1795—1871) — 115
Ланьи (de Lagny T., 1660—1734) — 86
Лаплас (de Laplace P. S., 1749—1827) — 65, 74, 146, 159, 164
Лаптев Б. Л. — 217, 230
Латышева Г. П. (р. 1930) — 155
Лебедева-Миллер В. — 154
Леви-Чивита (Levi-Civita T., 1873—1942) — 151
Лежандр (Legendre A. M., 1752—1833) — 32, 35, 115, 125, 168, 190, 200, 215
Лейбниц (von Leibniz G. W., 1646—1716) — 13, 45, 64, 158, 186
Лелон-Ферран Ж. — 154
Лэмуан (Lemoine E. M. H., 1840—1912) — 88
Лепот Г. (XVIII) — 145
Лермонтов М. Ю. (1814—1841) — 146
Линдеманн (Lindemann F., 1852—1939) — 191
Липшиц (Lipshitz R., 1832—1903) — 137
Литвинова Е. Ф. (1845—1919) — 149
Литтров (von Littrow J. E., 1781—1840) — 216
Литцман В. (1880—1959) — 196
Лобачевский Н. И. (1792—1856) — 17, 81, 106, 163, 171, 212, *215—220*, 230
Ломоносов М. В. (1711—1765) — 161
Ляпунов А. М. (1857—1918) — 169

Магавира (IX) — 59, 98
Магницкий Л. Ф. (1669—1739) — 11, 73, 78, 177, 222, 225
Майер (Maier F. C., 1697—1729) — 86
Маджини (Maggini G., 1555—1617)
Майкельсон (Michelson A., 1852—1931)
Маклорен (Maclaurin C., 1698—1746) — 161
Мальцев А. И. (1909—1967) — 43
ал-Мамун (ум. в 833) — 208
Марков А. А. (1856—1922) — 169
Маркушевич А. И. (1908—1979)—68, 136
Маскерони (Mascheroni L., 1750—1800) — 211
Матвиевская Г. П. (р. 1930) — 155, 230
ал-Махани (IX) — 123
Мебиус (Möbius A. F., 1790—1868)—40, 97
Мезириак де Баше (Bachet de Meziriac C. G., 1587—1638) — 114
Менделеев Д. И. (1834—1907) — 149
Менелай Александрийский (I—II) — 187
Менехи (IV в. до н. э.) — 191
Мерсенн (Mersenne M., 1588—1648)—156
Меций Адриан (XVI) — 99
Мешен (Mechain P. E., 1744—1804)—208
Миттаг-Леффлер (Mittag-Leffler M., 1846—1927) — 149, 168
Монж (Monge G., 1746—1818) — 40, 62, 105, 106
Мор Г. (1640—1697) — 211
Мордухай-Болтовский Д. Д. (1876—1952) — 27, 47, 58, 126, 183, 185, 212

ан-Найризи (X) — 123, 199
Налли П. — 153
Нарышкина Е. Н. (1895—1940) — 154
Нейгебауэр О. (Neugebauer O., р. 1899) — 47
Нейман Г. — 154
Неморарий (Jordanys Nemorarius, XIII) — 32, 94
Непер (Neper J., 1550—1617) — 69—74, 143
Нетер (Noether A. E., 1882—1935) — *152*—153
Никомед (II в. до н. э.) — 193, 195
Норвуд (Norwood R., ок. 1590—1675) — 87
Ньютон (Newton I., 1643—1727) — 10, 17, 20, 24, 32, 42, 45, 51, 52, 60, 62, 63, 86, 131, 132, 144, 145, 158, 222, 225, 228

Озанам (Ozanam J., 1640—1717) — 222
Олейник О. А. (р. 1925) — 155

Орем (Oresme N., 1323?—1382) — 59, 60
Осиповский Т. Ф. (1765—1832) — 164
Остроградский М. В. (1801—1861) — 147, 148, *163—166*
Оутред (Oughtred W., 1574—1660) — 51, 75, 144

Папп (III) — 13, 33, 88, 94, 182, 187, 195
Паскаль (Pascal B., 1623—1662) — 106, 141
Пастори М. — 153
Пачоли (Pacioli L., 1445 — ок. 1514) — 63, 66, 93, *138*, 142
Пелль (Pell J., 1610—1685) — 113
Пельтье (Peltier J., 1515—1582)—203
Пикар (Picard E., 1856—1941) — 154
Пикок (Peacock G., 1791—1858) — 60
Питиск (Pitiscus B., 1561—1613) — 69, 76
Пифагор (580—500 до н. э.) — 89, 91, 92, 94—96, 105, 114, 126, 172, *176—179*, 196—200, 202, 204, 205, 207
Платон (427—347 до н. э.) — 33, 127, 180, 181
Плутарх (ок. 46—ок. 126) — 89, 187, 189, 196
Понселе (Poncelet J. V., 1788—1867) — 88, 106
Понтрягин Л. С. (р. 1908) — 43, 230
Посидоний (135—51 до н. э.) — 27, 207, 214
Прокл (410—485) — 32, 88, 89, 177, 182, 196, 197, 214
Прудников В. Е. — 11, 163
Птолемей (II) — 77, 78, 81, 145, 181, 182, 187, 201, 202, 207, 214
Пуансо (Poinsot L., 1777—1859) — 34
Пуассон (Poisson S. D., 1781—1840)—164
Пушкин А. С. (1799—1837) — 146

Раик А. Е. — 97
Рамус П. (1515—1572) — 32
Рафаэль (Raffaello S., 1483—1520) — 40
Региомонтан (Regiomontanus J., 1436 — 1476) — 26, 32, 69, 71, 78, 79, 81, 85, 108, 142, 223
Рекорд (Recorde R., 1510—1558) — 143, 144
Ренч (Wrench J. M.) — 99
Риман (Riemann G. F. B., 1826—1866) — 106, 220
Роберваль (de Roberval G. P., 1602—1675) — 86
Розенфельд Б. А. (р. 1917) — 124, 125
Ролль М. (Rolle, 1652—1715) — 20
Рудио (Rudio F., 1856—1929) —189
Рудольф (Rudolff K., 1500? — 1545?) — 19, 116, 143, 225
Румовский С. Я. (1734—1812) — 216

Саккери (Saccheri G., 1667—1733) — 215
Сеченов И. М. (1829—1905) — 146
Сильвестр (Sylvester J. J., 1814—1897) — 151, 169
Смогоржевский А. С. (1896—1969) — 211
Снеллиус (Snellius W., 1580—1626)—208
Созиген (I в. до н. э.)
Сойер У. У. (Sawyer W. W.,р. 1911)—42, 230
Сомервиль М. (1780—1872) — 146
Спейдель (Speidel J., XVII) — 72
Сриддхара (XI) — 98, 173
Стевин (Stevin S., 1548—1620) — 19, 34, 36, 60, 66, 67, 126, 129, 130, 132
Стеклов В. А. (1863—1926) — 151, 169
Столетов А. Г. (1839—1896) — 146
Страннолюбский А. Н. (1839—1903)—148
Струве В. Я. (1793—1864) — 208

Тарталья (Tartaglia N., ок. 1449—1557) — 17, 24, 32, 63, *138*, *139*, 140, 210
Тебо (Thebaux, V) — 88
Теодор Киренский (V в. до н. э.) — 127
Теэтет Афинский (IV. в. до н.э.) — 93, 105, 127, 178, 182
Тициан (Tiziano V., 1477—1576) — 40
Торричелли (Torricelli E., 1608—1647) — 158
Трахтенброт Б. А. — 119
Тургенев И. С. (1818—1883) — 146
ат-Туси Насир ад-Дин (1201—1274)—79, 85, 125, 126, 129, 215

Уральцева Н. Н. (р. 1934) — 154
Урысон П. С. (1898—1924) — 153
Ушаков (XIX) — 35

Фабри (Fabri H., ок. 1606—1668) — 86

Фалес Милетский (ок. 624—548 до н. э.) — 32, 36, 93, 95, 105, 177, 178
Фархварсон А. Д. (Farquharson H., 1675—1739) — 73, 177
Фейербах (Feuerbach K., 1800 — 1834) — 88
Фергюсон (Ferguson D. F.) — 99
Ферма (de Fermat P., 1601—1665) — 44, 45, 59, 62, 114, 115, 158, 168, 230
Феррари (Ferrari L., 1522—1565) — 17, 140
дель Ферро (del Ferro S., 1465—1526) — 17, 63, 138, 140
Фетисов А. И. (1891—1980) — 218
Фибоначчи (Fibonacci L., 1180? — 1250?) — 24, 26, 59, 94, 102, 200, 223—226
Финк (Fink 1561—1656) — 84
Фиоре (XVI) — 138, 139
Фурье (Fourier J. B. J., 1768—1830)— 163, 164
Фусс Н. И. (1755—1826) — 163

ал-Хабаш (ок. 770 — ок. 870) — 79, 83, 84
Хайретдинова Н. Г. — 85
Хайям Омар (1048—1131) — 17, 119—125, 129
ал-Хайсам (Алхазем, ок. 965 — 1039) — 123
ал-Хорезми (ок. 780 — ок. 850) — 23, 24, 50, 52, 83, 224

ван-Цейлен (Ludolph van Ceulen, 1540—1610) — 99
Цейтен (Zeuthen H. G., 1839—1920)— 70, 116
Цзу Чун-чжи (428—499) — 98
Цицерон (Cicero M., 106—43 до н. э.) — 32

Чаплыгин С. А. (1869—1942)—151
Чеботарев Н. Г. (1894—1947) — 43, 190
Чебышев П. Л. (1821 — 1894) — 146, 151, 154, 163, *166—170*, 230
Четверухин Н. Ф (1891—1976)—212
Чжу Ши-цзе (XIII — XIV) — 141
Чибрикова Л. И. (р. 1925) — 155
Чикуини-Чибрарио М. — 153

Шатле Е. (1706—1749) — 145
Шатуновский С. О. (1859 — 1929) — 133, 135, 136, 212
Шенкс (Shanks W., XIX) — 99
Шилов Г. Е. (р. 1917) — 43
Шифф В. И. (?—1918) — 154
Шмидт О. Ю. (1891—1956) — 43
Шоластер Н. Н. (р. 1908) — 64, 72
Штейнер (Steiner J., 1796—1863) — 212, 226
Штифель (Stifel M., ок. 1496—1567)— 19, 24, 44, 66, 141—*143*
Шюке (Chuquet N., XV) — 19, 20, 59, 66, 142, 223

Эйлер (Euler L., 1707—1783) — 12, 45, 52, 59, 64, 65, 73, 79, 81, 86, 87, 88, 99, 115, 132, 145, 155, *159—163*, 168, 226
Эратосфен (276—194 до н. э.) — 54, 182, 195, *207*
Эрмит (Hermite Ch., 1822—1901) — 168, 191
Эсхил (525—456 до н. э.) — 39, 179

Юшкевич А. П. (р. 1906) — 19, 52, 78, 109, 116, 123, 159, 177, 230
Ющенко-Рвачева Е. Л. (р. 1919) — 156

Яновская С. А. (1896—1967) — 155

ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства 5
Обращение к читателям 6

ЧАСТЬ I. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА УРОКАХ

VII КЛАСС

Глава 1. Алгебра

§ 1. Дроби 10
1. Ньютон об алгебраической дроби . . . . . —
2. Алгебраические сведения в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого 11
3. Алгебраические дроби у Диофанта . . . . . —
4. Одно тождество Эйлера 12
5. О буквенных коэффициентах. Задача Ариабхатты . . . —
§ 2. Неравенства и применение их к приближенным вычислениям —
6. О знаках равенства и неравенства . . . . . —
7. О понятии неравенства 13
8. Строгие и нестрогие неравенства. Неравенство Коши . . 14
§ 3. Приближенные вычисления 15
9. О происхождении приближенных чисел . . . . . —
10. Правило А. Н. Крылова 16
11. О приближенном и графическом решении уравнений . . 17
§ 4. Квадратные корни 18
12. Извлечение квадратного корня из положительного числа . . —
13. О знаке корня 19
§ 5. Квадратные уравнения 20
14. Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне . . . . . —
15. Как составлял и решал Диофант квадратные уравнения . . 21
16. Квадратные уравнения в Индии 22
17. Квадратные уравнения у ал-Хорезми 23
18. Квадратные уравнения в Европе XIII—XVII вв. . . . 24
19. О теореме Виета . . . . . —

Глава 2. Геометрия

§ 6. Многоугольники 26
20. О параллелограмме . . . . . —
21. О трапеции 27
22. Вычисление площадей в древности . . . . . —
23. Измерение площадей в Древней Греции 28
24. «О земном верстании, как земля верстать» 30
§ 7. Окружность и круг 32
25. Об окружности и ее радиусе . . . . . —
26. О касательных к окружности. Архит Тарентский . . . . —

§ 8. Векторы 33
27. Из истории векторов . . . . . —
§ 9. Подобие 34
28. Отношение и пропорциональность отрезков . . . . . —
29. О делении отрезка в данном отношении 36
30. О подобии . . . . . —
31. «Деление в данном отношении» Аполлония 37
32. О построении подобных фигур. Пропорциональный циркуль. Галилей. . . . . —
33. Из истории преобразований. Преобразование подобия . . . 39

VIII КЛАСС

Глава 3. Алгебра

§ 10. Уравнения, приводимые к квадратным. Уравнения и неравенства с двумя переменными 42
1. Краткий обзор исторического развития алгебры . . . . . —
2. Уравнение первой степени с одним неизвестным. Геометрическое истолкование 43
3. Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными 45
4. Из истории решения системы уравнений, содержащей одно уравнение второй степени и одно линейное . . . . . —
5. Геометрическая алгебра и решение квадратных уравнений 47
6. О квадратичных иррациональностях 52
§ 11. Арифметическая и геометрическая последовательности . . . 54
7. О числовых последовательностях . . . . . —
8. Арифметические прогрессии в древности . . . . . —
9. Геометрические прогрессии в древности и в средние века 56
10. Развитие учения о прогрессиях 57
§ 12. Степень с рациональным показателем 59
11. О понятии степени с рациональным показателем . . . . . —
12. Степенная функция и графическое решение уравнений и неравенств 61
13. О приведении знаменателя или числителя дроби к рациональному виду 63
14. О показательной функции . . . . . —
§ 13. Десятичные логарифмы 65
15. Связь показательной функции с логарифмической. Развитие идеи логарифмов до Бюрги . . . . . —
16. Таблицы Бюрги 67
17. Таблицы Непера 69
18. Таблицы десятичных логарифмов 73
19. О счетной линейке 75

Глава 4. **Геометрия**

§ 14. Повороты и тригонометрические функции 76
20. О происхождении тригонометрии . . . . . —
21. О тригонометрических таблицах 77
22. О тригонометрических функциях и о развитии тригонометрии 78
23. Расширение понятий угла и дуги 80
24. Об измерении углов и дуг 81
25. Тригонометрические функции в Индии 82
26. Тень и рождение тангенса 83
27. Тригонометрия — автономная ветвь математики . . . 85
28. О графиках тригонометрических функций 86
29. Леонард Эйлер. Современный вид тригонометрии . . . . . —
§ 15. Метрические соотношения в треугольнике 88
30. Замечательные точки треугольника. Геометрия треугольника . . . . . —
31. О теореме Пифагора. Геометрия в Древней Индии 89
32. Герон Александрийский. Формула площади треугольника 90
33. «Золотое сечение» 91
34. Теорема косинусов и теорема синусов 93
§ 16. Вписанные и описанные многоугольники 95
35. О вписанных углах. Гиппократ Хиосский . . . . . —
36. О правильных многоугольниках. . . . . —
37. О длине окружности и площади круга. Архимед 97
38. О числе π 98
39. Об одной ошибке древних египтян 99
§ 17. Начальные сведения по стереометрии . . . . . —
40. О призме и параллелепипеде . . . . . —
41. Измерение объемов 100
42. О пирамиде и ее объеме 101
43. О конусе 102
44. О шаре 103
45. Краткий обзор развития геометрии 104

ЧАСТЬ II. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА КРУЖКОВЫХ И ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ

Глава 5. **Алгебра**

§ 1. О Диофанте и диофантовых уравнениях. «Последняя теорема Ферма» 108
§ 2. О термине и понятии «алгоритм» 115
§ 3. Омар Хайям — математик и поэт 119
§ 4. Теория отношений и расширение понятия числа в странах Ближнего и Среднего Востока 123
§ 5. Об эволюции понятия числа 126
§ 6. Иррациональные числа в древности и средние века. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби в XVI — XVII вв. 128

§ 7. Краткий обзор развития понятия числа XVII — XIX вв. 130
§ 8. Из истории алгебры в XVI в. 137
§ 9. Женщины-математики 144
§ 10. Рене Декарт — великий математик и мыслитель XVII в. 156
§ 11. О величайшем математике XVIII в. — Леонарде Эйлере 159
§ 12. О двух выдающихся математиках XIX в. — Остроградском и Чебышеве 163

Глава 6. **Геометрия**

§ 13. Практическая геометрия у разных народов 171
§ 14. О развитии геометрии в Древней Греции до Евклида . . . 177
§ 15. Александрийская эпоха. Евклид 181
§ 16. Архимед и Аполлоний Пергский 184
§ 17. Три знаменитые задачи древности 189
§ 18. Сто доказательств (из истории теоремы Пифагора) 196
§ 19. Теорема Птолемея и составление тригонометрических таблиц 201
§ 20. Деление площадей и преобразования равновеликих фигур 202
§ 21. Приборы и инструменты в измерениях и геометрических построениях. Измерение меридиана 205
§ 22. О развитии геометрии. Геометрия Лобачевского 212

Глава 7. **Исторические задачи**

§ 23. Примеры и задачи по алгебре 221
§ 24. Задачи по геометрии 225
Ответы, указания и решения к задачам 227
Рекомендуемая литература 230
Именной указатель

Герш Исакович Глейзер

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ VII—VIII КЛАССЫ

Спец. редактор **А. А. Свечников.** Редактор **Э. К. Викулина.** Художник **М. К. Шевцов.** Художественный редактор **Е. Н. Карасик.** Технический редактор **М. М. Широкова.** Корректор **К. А. Иванова**

ИБ № 6094

Сдано в набор 21 09 81. Подписано к печати 16 07.82. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типограф. № 3 Гарн. литер. Печать высокая Усл. печ. л. 15+0,25 форзац. Усл. кр.-отт. 16,75. Уч.-изд. л. 14,79+0,25 форзац. Тираж 258 000 экз. Заказ № 647. Цена 60 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул Свободы, 97.

Школьные учебники СССР

sheba.spb.ru/shkola